

هندسه تحلیلی

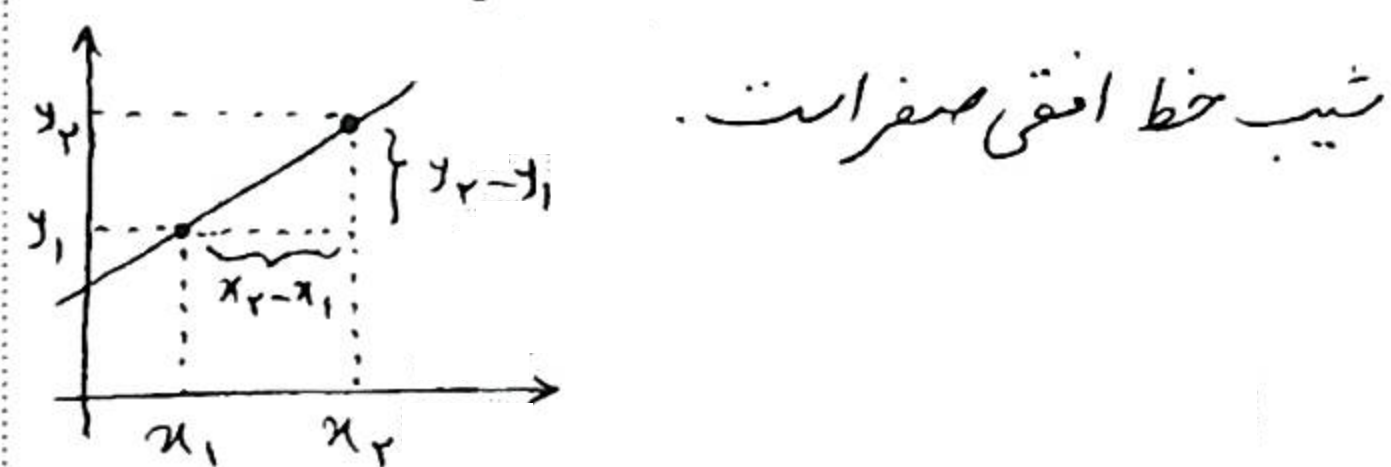
خط

شیب خط: برای خط غیر عمودی (غیر قائم) L با داشتن هر دو نقطه دلخواه از آن مانند $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ شیب را چنین تعریف می‌کنیم:

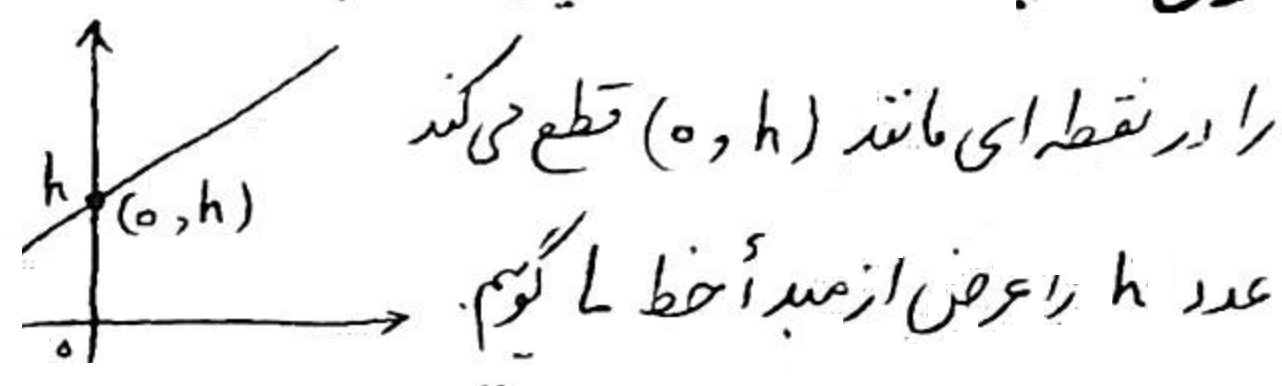
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow \text{تفاضل عرض در نقطه}$$

$$\rightarrow \text{تفاضل طول همان در نقطه}$$

شیب برای خطوط عمودی تعریف نمی‌شود.



عرض از مبدأ: اگر خط L غیر عمودی باشد، محورهای



طول از مبدأ نیز به طور مشابه تعریف می‌شود.

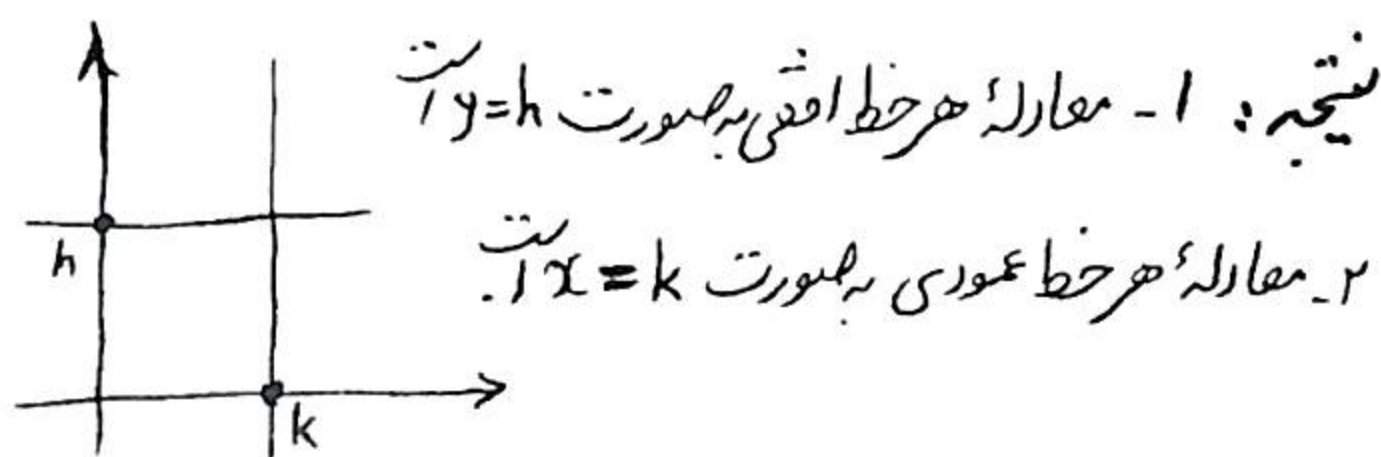
معادله شیب و عرض از مبدأ

برای هر خط غیر عمودی با شیب m و عرض از مبدأ h

$$y = mx + h$$

شیب $\downarrow$ عرض از مبدأ $\downarrow$

مختصات هر نقطه از خط در این معادله صدق می‌کند و هر نقطه که مختصاتش در این معادله صدق کند روی این خط قرار دارد.

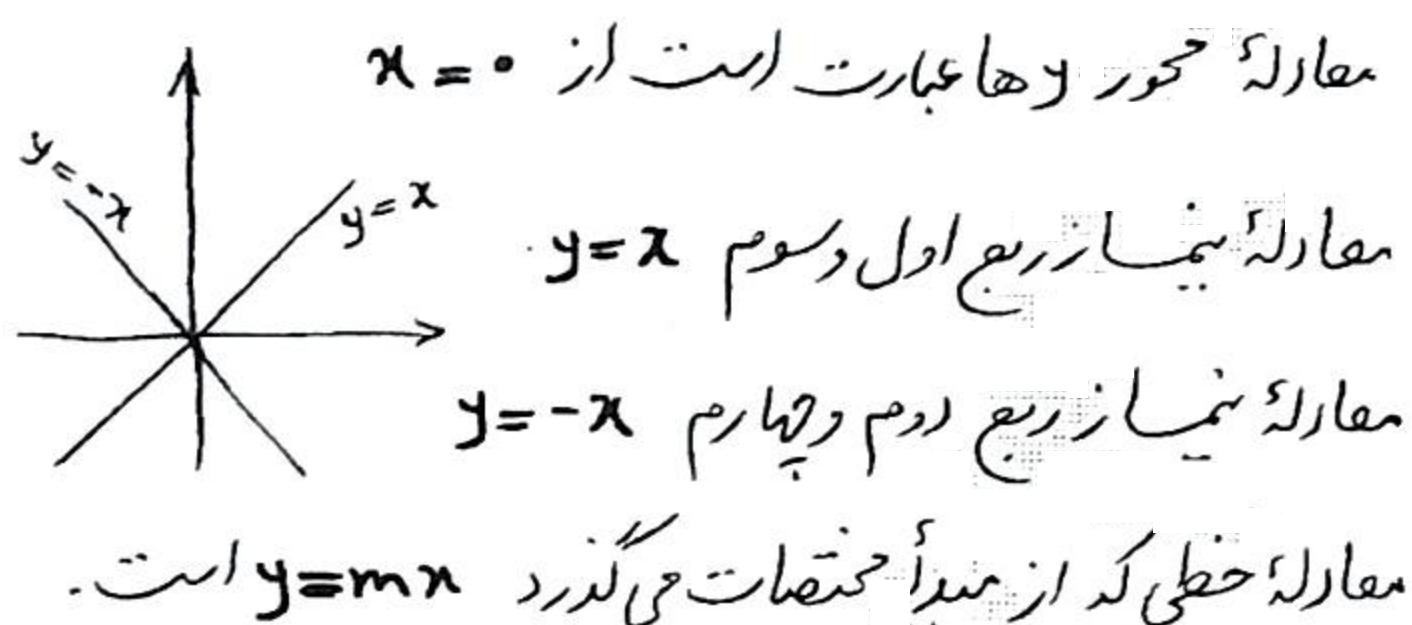


مثال: معادله یک خط افقی و یک خط عمودی که از نقطه

$A(4, 5)$ می‌گذرند را بنویسید.

پاسخ: خط عمودی $x = 4$
خط افقی $y = 5$

توجه: معادله محور x ها عبارت است از $y = 0$



مثال: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $A(1, 3)$ و $B(4, 9)$ می‌گذرد.

حل: شیب $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 3}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2$

قرار دادن مختصات A در $y = mx + h$ $3 = 2(1) + h$

$\Rightarrow h = 1 \Rightarrow y = 2x + 1$

معادله خطی که از دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$

می‌گذرد: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$

مثال: نشان دهید نقطه $A(\sqrt{2}, 2)$ روی خط به معادله

$y = \sqrt{2}x - 2$ قرار دارد.

حل: $2 = \sqrt{2}(\sqrt{2}) - 2 \Rightarrow 2 = 2 - 2 \Rightarrow 2 = 2$

نقطه برخورد دو خط: برای یافتن طول نقطه برخورد کافی

است مقدار y را از یکی از معادلات به دست آوریم و در

دیگری قرار دهیم. سپس عرض برخورد را از یکی از معادلات بیابیم.

مثال: در صورت وجود نقطه برخورد دو خط $y = x + 6$ و $y = 2x + 1$ را بیابید.

حل: $y - x = 6 \Rightarrow y = x + 6$

$$\Rightarrow x + 6 = 2x + 1 \Rightarrow x = 5$$

طول نقطه برخورد

قرار دادن در معادله اول

$$y - 5 = 6 \Rightarrow y = 11$$

عرض نقطه برخورد

$$\Rightarrow A(5, 11) \text{ نقطه برخورد}$$

معادله کلی خط: معادله هر خط (افقی یا عمودی یا مایل)

را می توان به صورت $ax + by + c = 0$ نوشت

شیب این خط: $m = -\frac{a}{b}$

عرض از مبدأ این خط: $h = -\frac{c}{b}$

خطوط موازی و خطوط عمود برهم

۱- دو خط افقی یا دو خط عمودی با هم موازی اند.

۲- هر خط افقی بر هر خط عمودی عمود است.

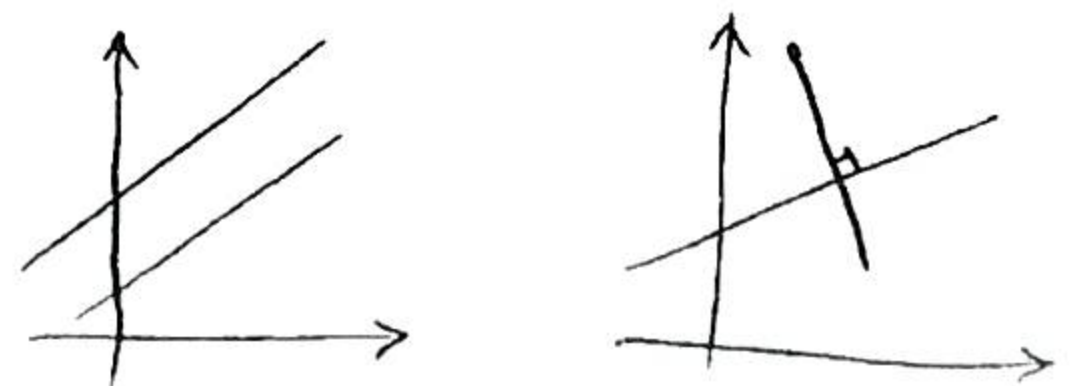
۳- دو خط مایل مانند $y = mx + h$ و $y = m'x + h'$

موازی اند اگر و تنها اگر $m = m'$ (یا $\frac{m}{m'} = 1$)

۴- دو خط مایل $y = mx + h$ و $y = m'x + h'$

برهم عمودند اگر و تنها اگر $mm' = -1$

(یعنی شیبها قرینه‌ی معکوس هم باشند)



مثال: معادله خطی را بنویسید که با خط $4x + 2y + 1 = 0$ موازی باشد و از نقطه $A(3, 1)$ بگذرد.

حل: $m' = -\frac{a'}{b'} = -\frac{4}{2} = -2$ شیب خط داده شده

در خط موازی اند

$$\Rightarrow m = -2$$

$y = mx + h$

$$\Rightarrow 1 = -2(3) + h \Rightarrow h = 7$$

$$\Rightarrow y = -2x + 7$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که بر خط $y = x$ عمود باشد و آن را در نقطه‌ای به طول ۵ قطع کند.

حل: $y = x \Rightarrow m' = 1 \Rightarrow m = -1$

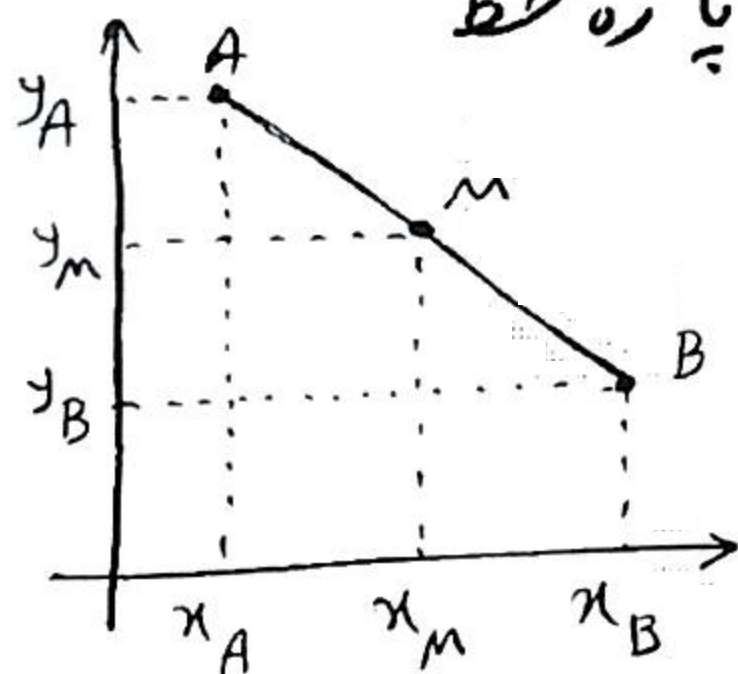
چون نقطه برخورد روی $y = x$ نیز قرار دارد پس عرض آن

نیز ۵ است یعنی $A(5, 5)$

$$y = -x + h \Rightarrow 5 = -5 + h \Rightarrow h = 10$$

$$\Rightarrow y = -x + 10$$

مختصات نقطه وسط یک پاره خط



اگر M نقطه وسط AB باشد

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

مثال: اگر $A(1, 2)$ و $M(4, 5)$ دو نقطه در صفحه باشند

مختصات B را به گونه‌ای بیابید که M وسط AB باشد.

حل: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 4 = \frac{1 + x_B}{2} \Rightarrow x_B = 7$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 5 = \frac{2 + y_B}{2} \Rightarrow y_B = 8$$

$$\Rightarrow B(7, 8)$$

مثال: اگر $A(2, 3)$ و $B(4, 1)$ و $C(6, 5)$ سه رأس یک مثلث باشند، مشخص کنید که این مثلث چه نوع مثلثی است؟ (مختلف الاضلاع، متساوی الساقین یا متساوی الاضلاع)

حل:

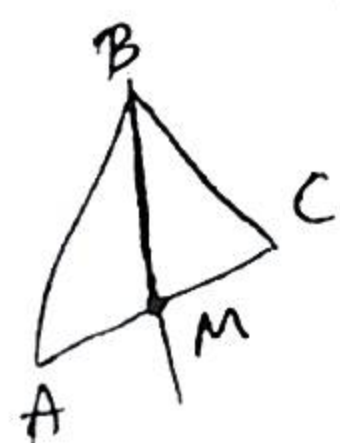
$$AB = \sqrt{(4-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{8}$$

$$AC = \sqrt{(6-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{20}$$

$$BC = \sqrt{(6-4)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{20}$$

$\Rightarrow$ متساوی الساقین است

مثال: اگر $A(3, 2)$ و $B(4, 8)$ و $C(7, 6)$ رئوس یک مثلث باشند آنگاه اندازه میانه واربر AC و همچنین، معادله این میانه را بدست آورید.



حل: فرض کنیم M وسط AC باشد

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{3+7}{2} = 5$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2+6}{2} = 4 \Rightarrow M(5, 4)$$

$$BM = \sqrt{(x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2} = \sqrt{17}$$

اندازه میانه

$$BM_{\text{شیب}} = \frac{y_B - y_M}{x_B - x_M} = \frac{8-4}{4-5} = -4$$

$$\Rightarrow y = -4x + h \xrightarrow{\text{نقطه B}} 8 = -4(4) + h$$

$$\Rightarrow h = 24 \Rightarrow y = -4x + 24$$

معادله BM

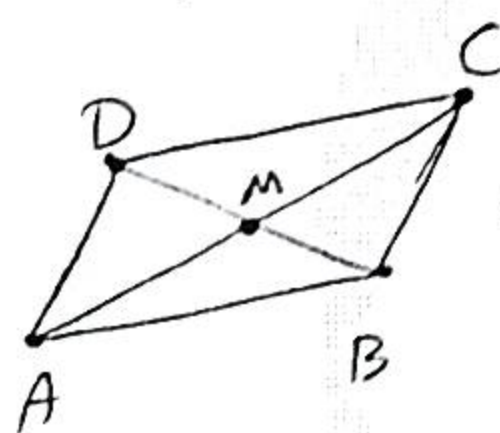
مثال: اگر A نقطه ای روی محور y ها و B نقطه ای روی محور x ها باشد و $M(2, 3)$ وسط AB باشد مختصات A و B را بیابید.

حل: می دانیم $x_A = 0$ و $y_B = 0$

$$x_M = \frac{x_B + 0}{2} \Rightarrow 2 = \frac{x_B}{2} \Rightarrow x_B = 4 \Rightarrow B(4, 0)$$

$$y_M = \frac{y_A + 0}{2} \Rightarrow 3 = \frac{y_A}{2} \Rightarrow y_A = 6 \Rightarrow A(0, 6)$$

مثال: در متوازی الاضلاع $ABCD$ ، نقطه برخورد دو قطر آن، $M(4, 5)$ است. اگر $A(1, 2)$ و $B(6, 4)$ باشند، مختصات C و D را بیابید.



حل: می دانیم قطرهاي متوازی الاضلاع یکدیگر را نصف می کنند پس M هم وسط AC است و هم وسط BD .

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow 4 = \frac{1 + x_C}{2} \Rightarrow x_C = 7$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow 5 = \frac{2 + y_C}{2} \Rightarrow y_C = 8$$

$$x_M = \frac{x_B + x_D}{2} \Rightarrow 4 = \frac{6 + x_D}{2} \Rightarrow x_D = 2$$

$$y_M = \frac{y_B + y_D}{2} \Rightarrow 5 = \frac{4 + y_D}{2} \Rightarrow y_D = 6$$

$C(7, 8)$
 $D(2, 6)$

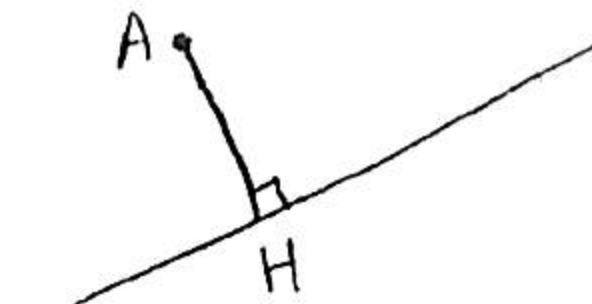
فاصله دو نقطه (یا طول پاره خط)

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

اگر دو نقطه روی یک خط افقی باشند $AB = |x_A - x_B|$

اگر دو نقطه روی یک خط عمودی باشند $AB = |y_A - y_B|$

فاصله یک نقطه از یک خط



اگر نقطه A خارج خط L باشد آنگاه فاصله آن تا خط، طول پاره خطی است که از A بر L عمود می شود (مانند پاره خط AH که H نزدیکترین نقطه از خط L به نقطه A است)

اگر L دارای معادله $ax+by+c=0$ باشد و $A(x_0, y_0)$ باشد آنگاه

$$AH = d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال: فاصله مبدأ مختصات و نیز نقطه $A(5, 2)$ تا خط $y = \frac{1-4x}{3}$ را به دست آورید.

حل: $y = \frac{1-4x}{3} \Rightarrow 3y = 1-4x \Rightarrow 4x + 3y - 1 = 0$

$$d = \frac{|4(5) + 3(2) - 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{25}{5} = 5 \quad \downarrow$$

فاصله A تا خط

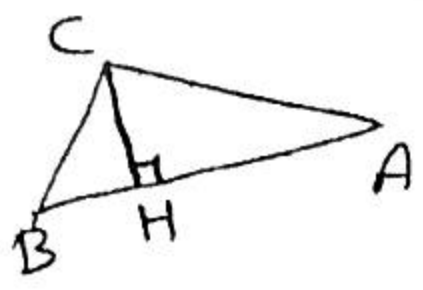
$$d' = \frac{|4(0) + 3(0) - 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|-1|}{5} = \frac{1}{5} \quad \downarrow$$

فاصله مبدأ مختصات تا خط

نکته: فاصله نقطه (x_1, y_1) از خط $y=h$ برابر است با $|y_1 - h|$ و فاصله این نقطه تا خط $x=k$ برابر است با $|x_1 - k|$

مثال: اگر $A(6, 3)$ و $B(2, 1)$ و $C(3, 4)$

رئوس یک مثلث باشند آنگاه اندازه ارتفاع وار در بر AB و نیز معادله این ارتفاع را به دست آورید.



حل: ابتدا معادله AB را می یابیم.

$$\text{شیب } AB = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{3-1}{6-2} = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{مختصات B}} 1 = \frac{1}{2}(2) + h \Rightarrow h = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x \rightarrow 2y = x \rightarrow x - 2y = 0$$

$$CH = d = \frac{|3 - 2(4)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$$

اندازه ارتفاع

$$CH \text{ چون بر } AB \text{ عمود است} \quad \text{شیب } CH = -\frac{1}{\text{شیب } AB}$$

$$\Rightarrow \text{شیب } CH = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

$$y = -2x + h' \xrightarrow{\text{مختصات C}} 4 = -2(3) + h'$$

$$\Rightarrow h' = 10 \Rightarrow y = -2x + 10$$

معادله CH

تست: یک ضلع مربعی منطبق بر خط $y = x + 2$ و نقطه $A(3, -1)$

یک رأس آن است. اندازه قطر مربع کدام است؟

د (1) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

فاصله در خط موازی

الف) فاصله $y=h$ و $y=h'$ برابر است با $|h-h'|$

ب) فاصله $x=k$ و $x=k'$ برابر است با $|k-k'|$

پ) فاصله $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ برابر است با

$$\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$