

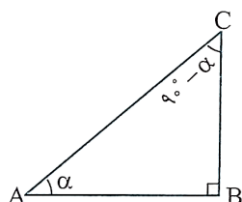
۲- روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا:

اگر نسبت‌های مثلثاتی زاویه ای را بدانیم، می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی برخی زاویه های دیگر را به راحتی از روی آن حساب کنیم.

نسبت‌های مثلثاتی زاویه های متمم:

با توجه به شکل زاویه های A و C متمم یکدیگرند و داریم:



$$\sin \alpha = \frac{BC}{AC} = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\cos \alpha = \frac{AB}{AC} = \sin(90^\circ - \alpha)$$

$$\tan \alpha = \frac{BC}{AB} = \cot(90^\circ - \alpha)$$

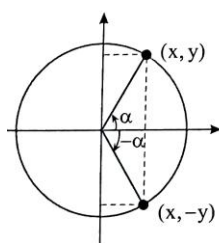
$$\cot \alpha = \frac{AB}{BC} = \tan(90^\circ - \alpha)$$

بنابراین

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

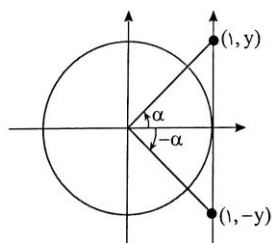
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha, \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه های قرینه:

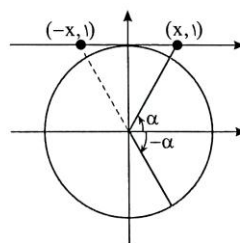


$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$



$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

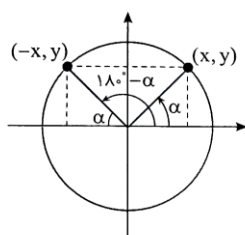


$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

بنابراین

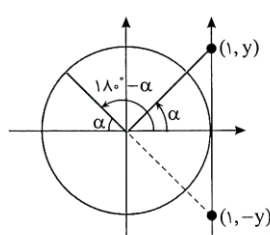
$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha, \quad \cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

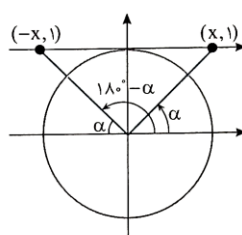


$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$



$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$$



$$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$$

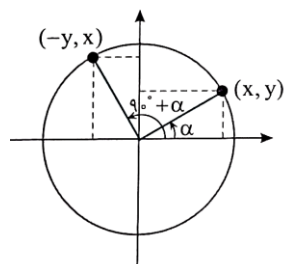
نسبت‌های مثلثاتی زاویه های مکمل:

بنابر این

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

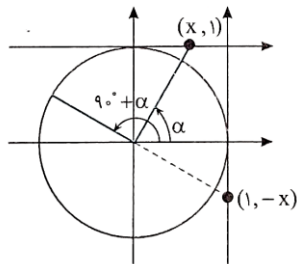
$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha, \quad \cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه ی $\frac{\pi}{2} + \alpha$:

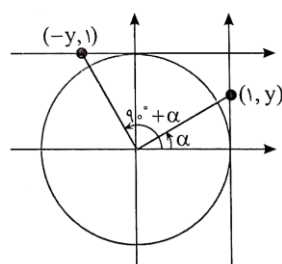


$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$



$$\tan(90^\circ + \alpha) = -\cot \alpha$$



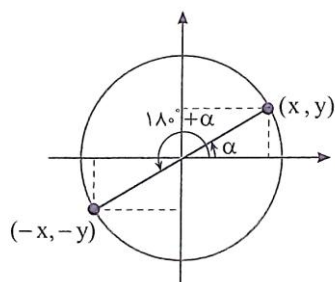
$$\cot(90^\circ + \alpha) = -\tan \alpha$$

بنابر این

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha, \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه ی $180^\circ + \alpha$:



$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

در نتیجه

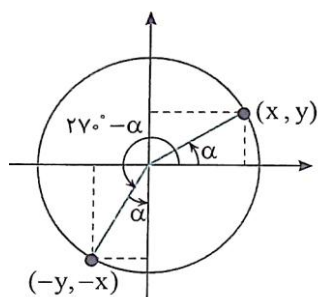
$$\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha, \quad \cot(180^\circ + \alpha) = \cot \alpha$$

بنابر این

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha, \quad \cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه ی $270^\circ - \alpha$:



$$\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos \alpha, \quad \cos(270^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$$

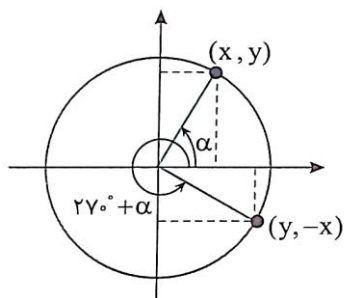
در نتیجه

$$\tan(270^\circ - \alpha) = \cot \alpha, \quad \cot(270^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$

بنابر این

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha, \quad \cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\alpha + 270^\circ$:

$$\sin(270^\circ + \alpha) = -\cos \alpha, \quad \cos(270^\circ + \alpha) = \sin \alpha$$

در نتیجه

$$\tan(270^\circ + \alpha) = -\cot \alpha, \quad \cot(270^\circ + \alpha) = -\tan \alpha$$

بنابراین

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha, \quad \cot\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه های با مجموع یا تفاضل $2k\pi$ رادیان:چون زوایای $2k\pi \pm \alpha$ زوایای هم انتها و یا قرینه هستند، پس داریم:

$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha, \quad \sin(2k\pi - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha, \quad \cos(2k\pi - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha, \quad \tan(2k\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(2k\pi + \alpha) = \cot \alpha, \quad \cot(2k\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

تست: مقدار $(\sin 81^\circ - \cos 81^\circ)(\sin 63^\circ + \cos 63^\circ)$ چقدر است؟

الف) ۲- ب) ۱- ج) ۱ د) ۲

مثال: مقدار $\cos 306^\circ + \cos 234^\circ + \cos 162^\circ + \cos 18^\circ$ را حساب کنید.مثال: مقدار $\sin 42^\circ \cos 39^\circ + \cos(-66^\circ) \sin(-33^\circ)$ را حساب کنید.مثال: ثابت کنید $\frac{\sin 135^\circ - \cos 12^\circ}{\sin 135^\circ + \cos 12^\circ} = 3 + 2\sqrt{2}$

تست: اگر $\tan ۲۰^\circ + a$ مقدار $\frac{\tan ۲۰^\circ + \cot ۱۶^\circ}{\tan ۷۶^\circ + \cot ۳۴^\circ}$ بر حسب a کدام است؟

- الف) $a+۱$ ب) $a-۱$ ج) $\frac{a}{a+۱}$ د) $\frac{a}{a-۱}$

مثال: اگر $\hat{A} + \hat{B} = ۶۰^\circ$ ثابت کنید $\sin(\hat{A} - ۱۲^\circ) = \sin(\hat{B} - ۱۲^\circ)$

تست: اگر ABC مثلث باشد، مقدار $\sin\left(\frac{\hat{A} + \hat{C}}{۲}\right)$ برابر با کدام است؟

- الف) $\sin \frac{\hat{B}}{۲}$ ب) $\cos \frac{\hat{B}}{۲}$ ج) $\sin \hat{B}$ د) $\cos \hat{B}$

تست: مقدار $\sin^۲ \frac{\pi}{۱۰} + \sin^۲ \frac{۲\pi}{۵}$ کدام است؟

- الف) $\frac{۱}{۴}$ ب) $\frac{۱}{۲}$ ج) $\frac{۳}{۴}$ د) ۱

تست: اگر $\tan \theta = -\frac{۳}{۴}$ و انتهای کمان روبرو به زاویه θ در ناحیه دوم باشد، مقدار

عبارت $A = \sin\left(\frac{۷\pi}{۲} - \theta\right) - \cos\left(\frac{۷\pi}{۲} + \theta\right)$ کدام است؟

- الف) $\frac{۱}{۵}$ ب) $-\frac{۱}{۵}$ ج) $\frac{۷}{۵}$ د) $-\frac{۷}{۵}$

تست: اگر $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ مقدار $\frac{\cos(\pi - \alpha) - \sin(\frac{\pi}{\nu} + \alpha)}{\sin(-\alpha) - \cos(\frac{\nu\pi}{\nu} + \alpha)}$ برابر کدام است؟

- الف) $\cot \alpha$ ب) $-\cot \alpha$ ج) $\cos \alpha$ د) $-\cos \alpha$

مثال: مقدار $\cos^{\frac{\pi}{\lambda}} + \cos^{\frac{3\pi}{\lambda}} + \cos^{\frac{5\pi}{\lambda}} + \cos^{\frac{7\pi}{\lambda}}$ را حساب کنید.

تست: اگر $a + b = \frac{\pi}{\nu}$ و $\sin(\nu a + \nu b) = -\frac{\nu}{\nu}$ ، مقدار $\tan^{\nu} b$ چقدر است؟

- الف) $\frac{1}{\nu}$ ب) $\frac{3}{\nu}$ ج) $\frac{5}{\nu}$ د) $\frac{7}{\nu}$

تست: مقدار عبارت $A = \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 180^\circ$ چقدر است؟

- الف) ۱ ب) -۱ ج) ۹۰ د) ۱۸۰

مثال: کدام عدد بزرگتر است $\sin 35^\circ$ یا $\cos 35^\circ$ ؟