

فصل ششم

حد و پیوستگی

درس سوم: پیوستگی

تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته است، هرگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L, f(a) = L$$

پیوستگی چپ

تابع f در نقطه $x = a$ دارای پیوستگی چپ است، هرگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1, f(a) = L_1$$

پیوستگی راست

تابع f در نقطه $x = a$ دارای پیوستگی راست است، هرگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2, f(a) = L_2$$

پیوستگی روی بازه

تابع f روی بازه (a, b) پیوسته است، هرگاه، در هر نقطه از این بازه پیوسته باشد.

تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته است، هرگاه، f در بازه (a, b) پیوسته باشد و در نقطه a پیوستگی راست و در نقطه b پیوستگی چپ داشته باشد.

نکته

اگر $D_f = R$ و f در هر نقطه از دامنه اش پیوسته باشد، می‌گوییم f روی بازه $(-\infty, +\infty)$ پیوسته است.



مثال ۱: پیوستگی $f(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ x^2 + 1 & x \geq 0 \end{cases}$ را در نقطه

$x = 0$ بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x) = 0 \quad f(0) = 1$$

تابع در $x = 0$ ناپیوسته است ولی پیوستگی راست دارد.

مثال ۲: a را طوری بیابید که تابع زیر در $x = 1$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} & 0 \leq x < 1 \\ [x] + a & x \geq 1 \end{cases}$$

$$x \rightarrow 1^- \Rightarrow x < 1 \Rightarrow |x - 1| = -(x - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x + 1)}{-(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x + 1) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} ([x] + a) = 1 + a$$

برای پیوسته بودن باید حد چپ و راست برابر باشند:

$$-2 = 1 + a \Rightarrow a = -3$$



تمرین ۱: حدود a را طوری بیابید که تابع زیر در $x = 2$ پیوسته نباشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax + 4 & x \geq 2 \\ x^2 - x & x < 2 \end{cases}$$

تمرین ۲: مقدار a و b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x = 2$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x + 2b}{x^2 - 2} & x > 2 \\ 2a + x + 1 & x = 2 \\ 2b + 5 & x < 2 \end{cases}$$

تمرین ۳: مقدار a و b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x = 0$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + a & x > 0 \\ -4 & x = 0 \\ 3x + 2b & x < 0 \end{cases}$$

تمرین ۴: تابعی مثال بزنید که حد آن در نقطه $x = 0$ برابر ۲ باشد ولی تابع در $x = 0$ پیوسته نباشد. نمودار این تابع را رسم کنید.



مثال ۳:

a را طوری بیابید که تابع زیر در بازه $[0, 3]$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} (x - 1)|x| & x < 2 \\ a + 2 \sin \frac{\pi}{x} & x \geq 2 \end{cases}$$

تابع باید در هر نقطه از بازه $[0, 3]$ مانند ۲ نیز پیوسته باشد لذا داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 1)|x| = (2 - 1) \times 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(a + 2 \sin \frac{\pi}{x} \right) = a + 2 \sin \frac{\pi}{2} = a + 2$$

$$2 = a + 2 \Rightarrow a = 0$$

نکته:

تابع $f(x) = [x]$ در نقاط به طول صحیح، ناپیوسته و در نقاط غیر صحیح پیوسته است.

مثال ۴: تابع $y = [x]$ در بازه $[2, k]$ پیوسته است. حداکثر مقدار k را تعیین کنید.

حل: تابع $y = [x]$ در نقاط صحیح ناپیوسته است، پس k حداکثر ۳ میتواند انتخاب شود. (چون بازه است، پیوستگی راست ۲ کافی است).

