

فصل هفتم: آمار و احتمال

۱. احتمال شرطی و پیامدها مستقل

۲. آمار توصیفی

درس ۱: احتمال شرطی و پیامدهای مستقل

ما در عصر احتمال به سر می‌رسیم ... در عصر قاطعیت تردید ...

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{عزاد طالت یا مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت‌ها}}$$

★ احتمال شرطی :

گاهی رخ دادن یک پیامد بر احتمال رخ دادن پیامد دیگر اثر می‌کند. مسائلی که در آن محاسبه احتمال یک پیامد مانند A با توجه به آگاهی از

رخ دادن پیامد دیگر مانند B مطرح است را احتمال شرطی می‌نامیم و آن را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم که خوانده می‌شود:

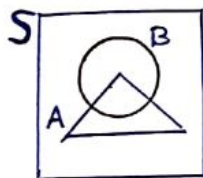
"احتمال A به شرط B"

در واقع چون از B آگاهی داریم، B فضای نمونه‌ای محسوب شده و جایگزین S می‌شود، در نتیجه فضای نمونه گاهی یافته است.

مثال: در پرتاب یک تاس اگر بدانیم عدد رول شده زوج است، احتمال آنکه اول باشد چقدر است؟

$$B = \{2, 4, 6\} \quad A = \{2\} \quad \rightarrow \quad P(A|B) = \frac{1}{3}$$

پیامد اول بودن



با فرمول احتمال شرطی:

مطابق شکل رو به رو

$$n(A) = \triangle \quad , \quad n(B) = \bigcirc \quad , \quad n(S) = \square$$

$$n(A \cap B) = \text{شکل مشترک}$$

حال اگر فضای نمونه‌ای را به مجموعه B گاهی دهیم، احتمال وقوع A در B (احتمال A به شرط B) به صورت

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

معاسبه می‌شود. لذا با بقیه صورت و استخراج کسر بر $n(S)$ داریم:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \Rightarrow \boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

— شرط معاسبه پذیرد $P(A|B)$ است آنکه $P(B) \neq 0$.

مثال . کسب این شامل ۴ مهره سیاه، ۲ مهره سفید و ۳ مهره قرمز است. مهره‌ای از کسب بیرون آورده و مشاهده شده که سیاه نیست، احتمال آن که

سفید باشد چقدر است؟

$$P(\text{سیاه نبودن} | \text{سفید بودن}) = \frac{P(\text{سیاه نبودن و سفید بودن})}{P(\text{سفید بودن})} = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5} = 40\%$$

۲ تا سفید (بالای ۲)
۲ تا سفید (پایین ۲) ← ۳ تا قرمز (پایین ۳)

۶ قانون جمع احتمال :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

← حداقل یکی

۷ دید ویژه!

۱. بارها شده دانش آموز پرسیده از کجا بفهمیم که مسأله شرطی است یا نه؟ باید ببینیم در مسائل شرطی همواره کلماتی مانند: "می‌دانیم که"، "فرض کنید"، "اگر" هم آید و در ادامه آن خبری درباره آزمائش می‌دهند سپس از ما می‌خواهند با توجه به آن خبر احتمال وقوع چیز دیگری را حساب کنیم.

۲. خوب وقت کنید برای حل مسائل شرطی اکثر مواقع از فرمول فوق استفاده نمی‌کنیم بلکه ابتدا شرط مسأله را روی فضای نمونه ای اعمال می‌کنیم و سپس در فضای نمونه ای جدید به دنبال فواید مسأله می‌گردیم.

۳. اگر A و B دویشامد ناسازگار باشند یعنی $A \cap B = \emptyset$ لذا $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$ و در نتیجه

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0$$

$$A \text{ و } B \text{ ناسازگار} \Rightarrow P(A|B) = 0$$

۴. بدیهی است که

$$P(A'|B) = 1 - P(A|B)$$

۵. رابطهای زیرهمواره برقرارند

$$P(A|A') = 0 \quad P(A|A) = 1 \quad P(\emptyset|A) = 0 \quad P(A|\emptyset) = \text{تعریف نشده}$$

مثال . اگر $P(A) = \frac{1}{4}$ و $P(B) = \frac{1}{4}$ و $P(A|B) = \frac{1}{3}$ باشد، $P(A \cup B)$ را به دست آورید.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{4}} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{13}{24}$$

مثال . دو تاس سفید و سیاه را با هم پرتاب می‌کنیم . اگر مجموع دو تاس بیش‌تر از ۹ باشد ، احتمال اینکه دو عدد رو شده برابر باشند را به دست آورید .

$$B = \{(4,4), (4,5), (5,4), (5,5), (6,4), (4,6)\}$$

$$A \cap B = \{(5,5), (4,4)\}$$

$$n(B) = 6$$

$$n(A \cap B) = 2$$

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

تمرین . اگر $P(A) = \frac{2}{5}$ و $P(B) = \frac{1}{4}$ و $P(A \cup B) = \frac{7}{10}$ باشد آنگاه مقدار $P(A|B) + P(B|A)$ را بیابید .

تمرین . خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است . اگر بدانیم این خانواده دقیقاً سه فرزند دختر دارد ، احتمال آن که فرزند اول این خانواده پسر باشد را به دست آورید .

پیشامدهای مستقل :



مثلاً اگر پیشامد A از پیشامد B مستقل است هرگاه رخ دادن A اثری روی رخ دادن B ندارد .
به عبارت دیگر رخ دادن B ، احتمال رخ دادن A را کم یا زیاد نکند و درواقع احتمال رخ دادن A با شرط رخ دادن B و بدون این شرط یکسان است ، یعنی

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \xrightarrow[\text{مستقل}]{P(A|B) = P(A)}$$

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)} \quad *$$

- برای اینکه نشان دهیم آیا دو پیشامد مستقل اند یا خیر باید درستی رابطه * را بررسی کنیم .

- اگر دو پیشامد A و B مستقل از هم نباشند آنرا وابسته می‌نامیم .

مثال . برای زیاده‌تر شرکت ۴ دواطلب وجود دارد که احتمال انتخاب شدن همه آن‌ها یکسان است . اگر افراد را با ۱ و ۲ و ۳ و ۴ نام‌گذاری کنیم آیا در پیشامد $A = \{1, 2\}$ و $B = \{3, 4\}$ مستقل اند؟

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad A \cap B = \{1\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) \stackrel{?}{=} P(A) \times P(B) \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

پس مستقل اند زیرا رابطه * برقرار است .

تذکره: اگر شمار A مستقل از شمار B باشد آنگاه

۱. B نیز مستقل از A. ۲. A' نیز مستقل از B. ۳. B' نیز مستقل از A. ۴. A' نیز مستقل از B' است.

اثبات رابطه ۲.

می دانیم که

$$A' \cap B = B - A$$

$$P(A' \cap B) = P(B - A) = P(B) - \overset{\text{مستقل}}{P(A \cap B)}$$

$$= P(B) - P(A) \times P(B) = P(B) \left(\overset{P(A')}{1 - P(A)} \right) = P(B) \times P(A')$$

$$\Rightarrow P(A' \cap B) = P(A') \times P(B) \quad \blacksquare$$

مثال: احتمال مبنی A در کشور ۰/۷ و احتمال مبنی B در کشور ۰/۸. چقدر احتمال دارد

(الف) دست کم یکی از آن‌ها در کشور قبول شود؟

(ب) فقط A قبول شود.

(ج) دست کم یکی از آن‌ها قبول نشود.

(د) فقط یکی از آن‌ها قبول شود.

(ه) هیچکدام قبول نشوند.

قبل شده یا نشدنی که نفروم قبول شدن یا نشدن در برابری ندارد پس مستقل اند $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

حل الف ←

$$P(\text{حداقل یکی}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.8 - 0.56 = 94\%$$

↓

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0.7 \times 0.8 = 0.56$$

$$P(A \text{ فقط}) = P(A - B) = P(A \cap B') = P(A) \times P(B')$$

حل ب ←

$$= P(A) \times (1 - P(B)) = 0.7 \times (1 - 0.8)$$

$$= 0.7 \times 0.2 = 0.14$$

$$P(\text{دست کم یکی قبول نشود}) = 1 - P(\text{هر دو قبول شوند}) = 1 - (P(A) \times P(B))$$

حل ج ←

$$= 1 - (0.7 \times 0.8) = 44\%$$

$$P(B \text{ فقط}) = P(B - A) = P(B \cap A') = P(B) \times P(A')$$

حل د ←

$$= 0.8 \times 0.3 = 0.24$$

$$P(\text{فقط یکی}) = P(A \text{ فقط}) + P(B \text{ فقط}) = 0.14 + 0.24 = 0.38$$

حل ه ←

$$P(\text{هیچکدام}) = P(\text{نه A نه B}) = P(A' \cap B') = P(A') \times P(B')$$

حل ۲ ←

$$= 0.3 \times 0.2 = 0.06 \text{ یا } 6\%$$

مثال ۳ . در پرتاب یک سکه دوتاس با هم . احتمال آنکه تاس عدد مضرب ۳ یا سکه "رو" ظاهر شود را به دست آورید .

$$A = \{۳, ۶\} \Rightarrow P(A) = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

$$B = \{ر\} \Rightarrow P(B) = \frac{۱}{۲}$$

$$A \text{ و } B \text{ مستقل از یکدیگرند} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

مثال ۴ . اگر A و B دو پدیده مستقل باشند بطوریکه $P(A) = \frac{۲}{۵}$ و $P(A \cup B) = \frac{۱}{۲}$ آنگاه $P(B')$ را به دست آورید .

$$A \text{ و } B \text{ مستقلند} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۲}{۵} + P(B) - (P(A) \times P(B))$$

$$P(B) (1 - P(A)) = \frac{۱}{۲} - \frac{۲}{۵} = \frac{۵-۴}{۱۰} = \frac{۱}{۱۰}$$

$$\Rightarrow P(B) (1 - \frac{۲}{۵}) = \frac{۱}{۱۰} \Rightarrow P(B) = \frac{\frac{۱}{۱۰}}{\frac{۳}{۵}} \Rightarrow P(B) = \frac{۱}{۶} \Rightarrow P(B') = 1 - P(B) = \frac{۵}{۶}$$

تمرین ۱ . دو تیر به سوزی هدفی ششگانه می‌کشیم . احتمال اصابت تیر اول به هدف ۰/۸ و این احتمال برای تیر دوم ۰/۹ است . احتمال اینکه

- حداقل یکی از آن‌ها به هدف بخورد مقدار است ؟

- فقط یک تیر به هدف بخورد ، را به دست آورید .

تمرین ۲ . دو نفر با نام‌های A و B با یک فرد مبتلا به بیماری ویروس ملاقات کرده اند . احتمال ابتلا به این بیماری برای این دو نفر به ترتیب

۰/۵ و ۰/۴ می‌باشد . مطلوب آنست که احتمال اینکه هیچکدام از این دو نفر به این بیماری مبتلا نشوند ؟

تمرین ۳ . اگر A و B دو پدیده مستقله $P(A) = \frac{۱}{۴}$ و $P(A \cup B) = \frac{۳}{۴}$ باشند . مقدار $P(B)$ را به دست آورید .

