آشنایی با نظریه اعداد

درس ۲ ادامه نظریه اعداد

ویژگی ها ۲ :

$\xrightarrow{(۴),m=b^{n-۱}}$ ۷) $a \mid b \Rightarrow a \mid b^n \ (n \in \mathbb{N})$

۸) $a \mid b \Leftrightarrow ka \mid kb \quad (k \in \mathbb{Z})$

۹) $a \mid b \quad 0 \neq b \Rightarrow |a| \leq |b|$

$\xrightarrow{(۹)}$ ۱۰) $a \mid b \ \ b \mid a \quad a = \pm$

۱۱) $a \mid b \ , c \mid d \ \Rightarrow \ ac \mid bd$

سوال ۴ :

اگر $۷ \mid a+۳b$ و $۷ \nmid b$ ، به ازای چند مقدار k از مجموعه $A=\{x \mid x \in \mathbb{Z}, -۳ \le x \le ۷\}$ ، رابطهء

$۷ \mid ۲a+kb$ $(a,b \in \mathbb{Z})$ لزوماً برقرار است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ :

$$۷ \mid a + ۳b \Rightarrow ۷ \mid ۲a + ۶b$$

$$\left.\begin{array}{l} ۷ \mid ۲a + ۶b \\ ۷ \mid ۲a + kb \end{array}\right\} \quad ۷ \mid (k - ۶)b$$

یعنی $(k - ۶)b$ بر ۷ بخش پذیر است ، چون b بر ۷ بخش پذیر نیست و عددی اول است ،الزاماً k-6 بر ۷ بخش پذیر است که در مجموعه A ، فقط ۱- و ۶ ، این ویژگی را دارند.

درس ۲

نکته : اگر

$$a \mid bm+c \ , \ a \mid dm+e \Rightarrow a \mid (b\times e)-(d\times c)$$

اثبات :

$$a \mid bm+c \Rightarrow a \mid d\times bm+d\times c,$$

$$a \mid dm+e \Rightarrow a \mid b\times dm+b\times e$$

$$\xrightarrow{-} a \mid (b\times e)-(d\times c)$$

سوال ۵ :

چند مقدار صحیح n وجود دارد به گونه ای که $n^2 + 2$ بر $n + 6$ بخش پذیر باشد؟

۱) ۲ ۲)۴ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ : گزینه ۱

$$n^2+2 \mid n+6 \xrightarrow{\times(n-6)} n^2+2 \mid (n-6)(n+6)$$

$$\Rightarrow n^2+2 \mid n^2-36$$

$$\Rightarrow n^2+2 \mid n^2+2$$

$$\Rightarrow n^2+2 = \pm 1, \pm 2, \pm 19, \pm 38$$

$$n^2+2 \mid 38$$

مقادیر صحیح n :

$$n = 0, 6, -6$$

مقدار $n = 6$ قابل قبول نیست ، زیرا در مرحله اثبات باید شرط $n - 6 \neq 0$ را در نظر بگیریم

درس ۲ ادامه نظریه اعداد

۱۲) $a \mid b \Leftrightarrow a^n \mid b^n$

۱۳) $a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^m \quad n \leq m \,(m , n \in \mathbb{N})$

۱۴) $a^n \mid b \Rightarrow a \mid b \quad (n \in \mathbb{N})$

۱۵) $m \leq n \Leftrightarrow m! \mid n!$

ویژگی ها ۳ :

سوال ۶:

اگر $a^3 \mid a+b$، آن گاه کدام نتیجه گیری لزوماً درست نیست؟ $(a,b \in \mathbb{N})$

۱) $a^4 \mid b^2 - a^2$

۲) $a^3 \mid b^3 - a^3$

۳) $a^3 \mid b^3 + a^3$

۴) $a^4 \mid b^2 + a^2$

پاسخ :

$$a^3 \mid a+b \Rightarrow a \mid a+b \xrightarrow{a \mid a} a \mid b \xrightarrow{a \mid a} a \mid b-a$$

طبق فرض : $a^3 \mid a+b$

$$\xrightarrow{\times} a^4 \mid b^2-a^2$$

$$a \mid b \Rightarrow a^3 \mid b^3 \xrightarrow{a^3 \mid a^3} a^3 \mid b^3 \pm a^3$$

مثال نقض گزینه ۴ :

$$b=6, a=2$$