

باسمه تعالی

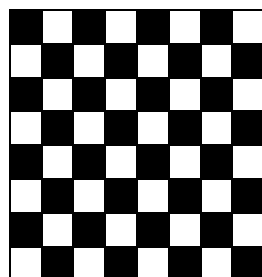
جزوه آموزشی درس اول فصل ۷

ریاضی هفتم

معرفی توان



در افسانه ها آمده است یکی از پادشاهان هندی فرمان داده بود هر کسی برایش سرگرمی جذاب و مفرحی بیاورد، هر پاداشی طلب کند به او خواهد داد. شخصی بازی شطرنج را برای او می برد و پادشاه نیز راضی می شود و قرار می شود هر چه می خواهد به او پاداش بدهند. ولی مخترع شطرنج درخواست عجیبی از پادشاه می کند. او می گوید من چیز زیادی نمی خواهم. صفحه شطرنج ۶۴ خانه دارد.



در خانه اول یک دانه گندم قرار دهند.
و در خانه بعدی دو برابر خانه اول گندم قرار دهند.
و در خانه بعدی دو برابر خانه قبلی
همینطور تا خانه آخر و همان مقدار گندم برای من کافی است.

پادشاه به او می گوید که تو می توانستی چیزی بیشتر از چند کیسه گندم در خواست کنی اما او می گوید من به همین مقدار راضی هستم. پادشاه فکر می کند با عجب آدم ساده لوحی طرف است. دستور می دهد این مقدار گندم را محاسبه کنند و به مخترع بدهند.

پس از چند روز مسئول انبار گندم خدمت پادشاه می رسد و گزارش می دهد که اگر تمام گندم های کل کشور را جمع کنیم و از همه کشور های همسایه هم قرض بگیریم حتی کفاف بخشی از گندم در خواستی مخترع شطرنج را نمی دهد. آیا می دانید مقدار گندم درخواستی این شخص چقدر بوده است؟

مقدار گندم درخواستی آن قدر بزرگ می شود که حتی در ذهن انسان نیز نمی گنجد. جالب است بدانید امروزه محاسبه کرده اند اگر کل مساحت کره زمین اعم از خشکی ها و دریاها ۵ بار زیر کشت برود، برابر با پاداش مخترع شطرنج است. شما نیز در آینده می توانید مقدار آن را محاسبه کنید.

مردم در دوران خیلی قدیم، اکثر محاسبات شان را با عمل جمع، انجام می دادند. (ضرب وجود نداشت). گاهی اوقات محاسبات مشکل آفرین می شد. مثلاً اگر قیمت جنسی ۲ واحد ارزش داشت و کسی ۱۰۰۰ نمونه از آن جنس می خواست، باید ۲ را ۱۰۰۰ بار جمع می کرد تا قیمت کل را محاسبه کند.

در حالی که امروزه شما می توانید خیلی راحت با یک محاسبه ی ساده ، قیمت جنس را به دست آورید.

$$\underbrace{2 + 2 + 2 + 2 + \dots + 2}_{1000 \text{ بار}} = 1000 \times 2 = 2000$$

۱۰۰۰ بار

در دوره ابتدایی یاد گرفتیم که برای **ساده نویسی جمع از عمل ضرب** استفاده می کنیم. یعنی اگر **تکرار جمع** داشته باشیم، می توانیم از **ضرب** استفاده کنیم. مثال های بیشتر:

$$3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3$$

$$7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 6 \times 7$$

تمرین

(۱) حاصل عبارت های زیر را بنویسید.

۱) $8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 =$

۲) $12 + 12 + 12 + 12 =$

۳) $a + a + a =$

۴) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} =$

برای سادگی در محاسبات و اینکه ضرب اعداد را راحت تر نمایش دهیم، از توان استفاده می کنیم.

همان طوری که اشاره کردیم، در ریاضی برای **ساده نویسی عمل ضرب از توان** استفاده می کنیم. یعنی اگر **تکرار ضرب** داشته باشیم، می توانیم از **توان** استفاده کنیم.

به طور کلی یک عبارت جبری توان دار به صورت a^n نوشته می شود و می خوانیم a به توان n .

(به a پایه، به n توان یا نما یا قوه و به a^n یک عبارت توان دار می گوئیم.)

a^n یعنی ضرب عدد a به تعداد n بار تکرار شود.

$$\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_n$$

توان n (پایه a)

مثال: عبارت $3 \times 3 \times 3 \times 3$ را به صورت 3^4 می نویسیم و می خوانیم: 3 به توان 4 .

(به 3 ، پایه و 4 ، توان می گوئیم.)

تمرین

۱) حاصل عبارت های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید و مفهوم آن را بنویسید..

۱) $5 \times 5 \times 5 = 5^3$ ۵ به توان ۳ یعنی ضرب عدد ۵، ۳ بار تکرار شده است.

۲) $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 =$

۳) $4 \times 4 =$

۴) $(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) =$

۵) $x \times x \times x \times x \times x =$

۲) حاصل عبارت های زیر را به صورت ساده تر بنویسید.

۱) $\frac{a \times a}{b \times b \times b} = \frac{a^2}{b^3}$

۲) $\frac{x}{y \times y \times y} =$

۳) $x \times x \times y \times y \times x = x^3 \times y^2 = x^3 y^2$

۴) $\frac{m \times m \times n \times n}{t \times y \times y} =$

۵) $a + a + a + a + b + b =$

۶) $\frac{a \times a}{a + a} =$

۷) $(x + y)(x + y)(x + y) =$

۸) $(ab)(ab)(ab)(ab) =$

۹) $(xyz)^3 =$

۱۰) $(\frac{x}{y})^2 =$

۳) تساوی های زیر را کامل کنید و حاصل آن ها را به دست آورید.

۱) $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

۲) $(\frac{2}{5})^4 = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{16}{625}$

۳) $(\frac{0}{2})^6 = \frac{0}{2} \times \frac{0}{2} \times \frac{0}{2} \times \frac{0}{2} \times \frac{0}{2} \times \frac{0}{2} = \frac{0}{64}$

۴) $10^5 =$

۵) $3^4 =$

۶) $(\frac{0}{0.1})^2 =$

۷) $\frac{7^4}{9} =$

۸) $(\frac{1}{4})^3 =$

نکته:

۱) هر عددی به توان یک برسد، حاصلش برابر با خودش است. (هر عددی که توان ندارد، توان آن، یک است.)
مانند:

$$5^1 = 5 \quad 7 = 7^1 \quad \Rightarrow \quad a^1 = a$$

۲) صفر به توان هر عددی (به غیر از صفر) برسد، حاصل آن صفر است.
مانند:

$$0^3 = 0 \times 0 \times 0 = 0 \quad 0^6 = 0 \quad 0^{100} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0^a = 0$$

۳) یک به توان هر عددی (به غیر از صفر) برسد، حاصل آن یک است.
مانند:

$$1^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1 \quad 1^6 = 1 \quad 1^0 = 1 \quad 1^{35} = 1 \quad \Rightarrow \quad 1^a = 1$$

۴) اگر در صورت یک کسر، عدد یک باشد و مخرج آن عدد توان دار باشد، می توانیم توان را بیرون پرانتز بنویسیم. چرا؟
مانند:

$$\frac{1}{3^4} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \quad \frac{1}{2^7} = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

۵) اگر صورت و مخرج یک کسر، توان مساوی داشته باشند، می توانیم توان را بیرون از پرانتز بنویسیم. چرا؟
مانند:

$$\frac{3^4}{7^4} = \left(\frac{3}{7}\right)^4 \quad \frac{5^2}{13^2} = \left(\frac{5}{13}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

فعالیت

یاد گرفتیم که $(-2)^4$ یعنی (-2) ، چهار مرتبه ضرب شده است و یا $(-2)^3$ یعنی (-2) ، سه مرتبه تکرار شده است.
حاصل $(-2)^4$ و $(-2)^3$ را به دست می آوریم.

$$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = (- \times - \times -) \times (2 \times 2 \times 2) = -8$$

$$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = (- \times - \times - \times -) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2) = +16$$

حاصل عبارت های قسمت الف و ب را به دست آورید و قسمت نتیجه را کامل کنید.

(الف)

$$(-5)^2 =$$

$$(-4)^4 =$$

$$(-2)^6 =$$

$$\left(-\frac{3}{7}\right)^2 =$$

(ب)

$$(-7)^3 =$$

$$(-3)^5 =$$

$$(-2)^7 =$$

$$(-1)^9 =$$

از فعالیت های قسمت الف و ب چه نتیجه ای می توان گرفت؟ جملات را کامل کنید.

نتیجه ی قسمت الف):

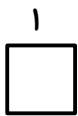
اگر یک عدد منفی را به توان برسانیم، حاصل آن عددی می شود.

نتیجه ی قسمت ب):

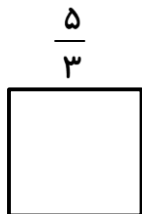
اگر یک عدد منفی را به توان برسانیم، حاصل آن عددی می شود.

فعالیت

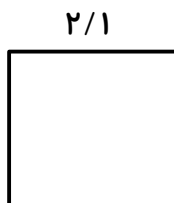
۱) مساحت مربع های زیر را به دست آورید.



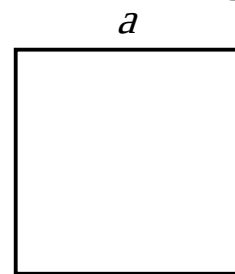
$$S =$$



$$S =$$



$$S =$$



$$S =$$

مساحت مربعی به ضلع a برابر با است.

مربع یک عدد یعنی ضرب آن عدد دو بار تکرار شود. به مربع هر عدد مجذور آن عدد می گوئیم.

بنابراین **مجذور** یا **مربع** هر عدد یعنی **توان دوم** آن عدد. a مجذور = ...

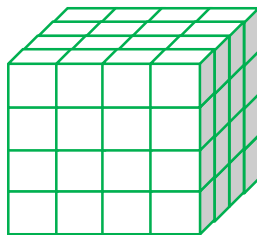
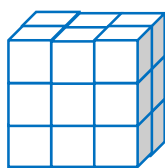
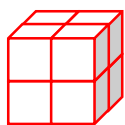
تساوی ها را کامل کنید.

الف) مجذور عدد ۳ برابر با $3^2 = 9$ است. ب) مجذور عدد ۱۱ برابر با است.

پ) مجذور عدد $\frac{2}{9}$ برابر با است. ت) مجذور عدد $4/0$ برابر با است.

ث) مساحت مربعی به ضلع $3x$ برابر با است. ج) مجذور -6 برابر با است.

۲) تعداد مکعب های کوچک $1 \times 1 \times 1$ را در هر شکل با یک عدد توان دار بنویسید.



حجم مکعبی به ضلع n برابر با است.

مکعب هر عدد یعنی توان سوم آن عدد. = مکعب a

تساوی ها را کامل کنید.

الف) مکعب عدد ۴ برابر با $4^3 = 64$ است. ب) مکعب عدد ۱۰ برابر با است.

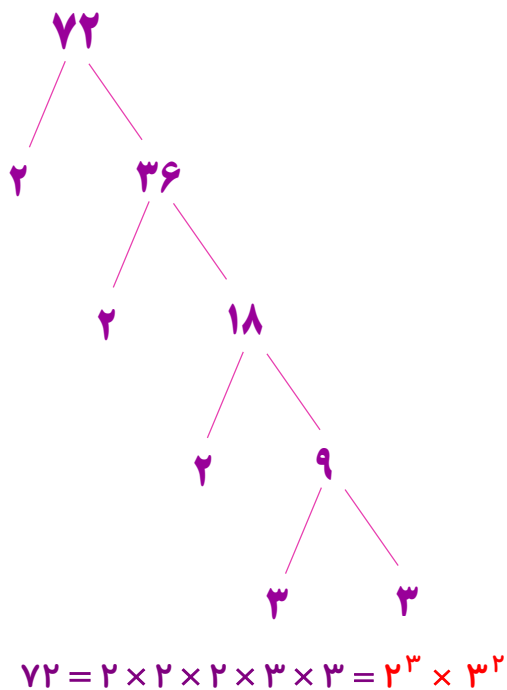
پ) مکعب عدد $\frac{2}{3}$ برابر با است. ت) مکعب عدد 0.1 برابر با است.

ث) حجم مکعبی به ضلع $5x$ برابر با است. ج) مکعب -2 برابر با است.

کاربرد های توان

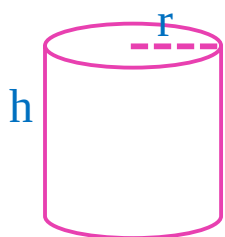
۱) هرگاه اعداد را تجزیه می کنیم چون تکرار عمل ضرب داریم، برای راحتی و ساده نویسی حاصل را به صورت

توان دار می نویسیم. مانند:



۲) در نوشتن فرمول مساحت ها ، احجام ، در ضرب عبارت های جبری و در دیگر روابط ریاضی که در آینده خواهید خواند، در نمایش واحدهای سطح و حجم مانند (متر مربع m^2) ، (سانتی متر مکعب cm^3) و ... همچنین در نمایش فرمول ها در درس فیزیک از توان استفاده می کنیم.

مثال :

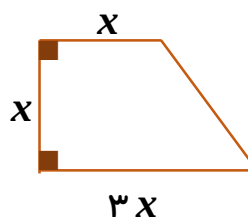
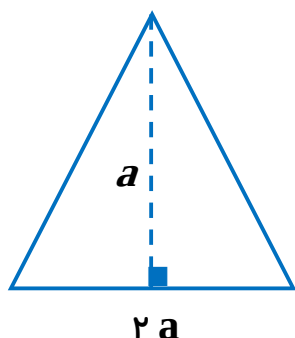


حجم استوانه مقابل را با عبارت جبری توان دار نشان دهید.

$$v = s \cdot h = (r \times r \times \pi) \times h = r^2 \pi h = \pi r^2 h$$

تمرین

مساحت شکل های زیر را با عبارت جبری توان دار نشان دهید.



فعالیت

جدول زیر را کامل کنید. سپس نتیجه ی فعالیت را توضیح دهید.

اعداد	حاصل	تعداد ارقام
10^1	۱۰	دو رقم
10^2	۱۰۰	سه رقم
10^3		
10^4		
10^5		
:		
10^n		

تمرین تساوی ها را کامل کنید .

تساوی ها را کامل کنید .

۱) عدد 10^{14} چند رقمی است؟

10^{99} چطور؟

۲) حاصل 10^{12} را بنویسید.

۳) عدد 10^{15} چند تا صفر در سمت

راست خود دارد؟

حل مسأله

۱) عدد 11^{13} به طور تقریبی چند رقمی است؟ چرا؟
با انتخاب راهبرد مناسب پاسخ سوال را پیدا کنید.

۲) شخصی، خبری شنید. او روز بعد، خبر را به ۳ نفر دیگر گفت. این ۳ نفر روز بعد، هر کدام خبر را به ۳ نفر دیگر گفتند و به همین ترتیب این خبر رسانی ادامه پیدا کرد. در پایانی روز دهم، چند نفر با خبر شده اند؟
گزینه ی درست را با ذکر توضیحات انتخاب کنید.

۳۰ (۱) ۱۰^۳ (۲)

۳۱۰ (۳) ۳۰^۳ (۴)

مسأله ای برای علاقه مندان (حل این مسأله برای همه دانش آموزان الزامی نیست.)

در یک آزمایشگاه، سلول ها، هر ۳ ساعت، به ۲ سلول تقسیم می شوند. کدام گزینه در مورد تعداد سلول ها پس از گذشت یک ماه ۳۰ روزه درست است؟

۳۰ (۱) ۱۰^۳ (۲)

۳۱۰ (۳) ۳۰^۳ (۴)

شاد، پُرتلاش، متفکر و خلاق باشید.