

توان و جذر

توان: اگر عددی چند بار در خودش ضرب شده باشد. برای مختصر نویسی از توان استفاده می شود.

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 \xrightarrow{\text{توان}} \text{پایه} \quad \text{مانند:} \quad \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_n = a^n \xrightarrow{\text{توان}} \text{پایه} \quad (a \text{ به توان } n)$$

(۳ به توان ۴)

نکته: هر عدد یا عبارتی که توان نداشته باشد توان آن یک است. عددی که توان آن یک باشد برابر با خود آن عدد است.

$$8^1 = 8 \quad x^1 = x \quad \text{مانند:}$$

نکته: عدد یک به هر توانی که باشد. حاصل برابر با یک است.

$$1^{200} = 1 \quad \text{مانند:}$$

نکته: هر عبارت یا عددی (غیر از صفر) به توان صفر باشد. حاصل برابر با یک است.

$$6^0 = 1 \quad a^0 = 1 \quad \text{مانند:}$$

نکته: عدد منفی داخل پرانتز باشد علامت منفی به تعداد توان ضرب می شود. اگر عدد منفی داخل پرانتز نباشد منفی به توان مربوط نیست.

$$(-4)^2 = -4 \times -4 = 16 \quad -4^2 = -(4 \times 4) = -16 \quad \text{مانند:}$$

نکته: عدد کسری داخل پرانتز باشد صورت و مخرج به همان تعداد توان ضرب می شود. اگر عدد کسری داخل پرانتز نباشد فقط عددی به توان ضرب می شود که توان بالای آن قرار داشته باشد.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \quad \frac{2^2}{3} = \frac{2 \times 2}{3} = \frac{4}{3} \quad \frac{2}{3^2} = \frac{2}{3 \times 3} = \frac{2}{9} \quad \text{مانند:}$$

نکته: عدد منفی به توان زوج برسد حاصل عددی مثبت و اگر به توان فرد برسد حاصل عددی منفی می شود.

$$(-3)^4 = 81 \xrightarrow{\text{توان زوج}} \quad (-3)^3 = -27 \xrightarrow{\text{توان فرد}} \quad \text{مانند:}$$

مثال: حاصل هر عبارت را به دست آورید.

$$4^3 - 2^5 + 9^0 = 64 - 32 + 1 = 33 \quad \frac{-3^2 + 1^8 - 2^2}{6^2 \div 2^2} = \frac{-9 + 1 - 4}{36 \div 4} = \frac{-12}{9} = -\frac{4}{3}$$

توان و جذر

مجذور یا مربع یک عدد: به توان دوم هر عدد مجذور یا مربع آن عدد گفته می شود.

مانند: مربع عدد ۶ برابر است با: $6^2 = 36$

مکعب یک عدد: به توان سوم هر عدد مکعب آن عدد گفته می شود.

مانند: مکعب عدد ۶ برابر است با: $6^3 = 216$

مثال: الف) مجموع مربع ۵ و مکعب ۴ را به دست آورید. $5^2 + 4^3 = 25 + 64 = 89$

ب) اختلاف مکعب و مجذور $0/3$ را به دست آورید. $(0/3)^3 - (0/3)^2 = 0/027 - 0/09 = 0/063$

اولویت های ریاضی: اگر چند علامت ریاضی با هم باشند از اولویت ریاضی استفاده می شود:

۱) ابتدا داخل پرانتز جواب داده می شود و اگر چند پرانتز باشد از داخل ترین پرانتز جواب می دهیم.

۲) توان یا جذر ۳) ضرب و تقسیم ۴) جمع و تفریق

نکته: اگر از یک اولویت هر دو با هم باشند یعنی ضرب و تقسیم با هم باشند از علامتی زودتر استفاده می کنیم که به سمت چپ نزدیکتر باشد.

مثال: حاصل هر عبارت را به دست آورید.

$$5 - 5 \times 2^3 \div 4 = 5 - 5 \times 8 \div 4 = 5 - 40 \div 4 = 5 - 10 = -5$$

$$4 + 3^2 - (5^2 - 24)^{10} = 4 + 3^2 - (25 - 24)^{10} = 4 + 3^2 - 1^{10} = 4 + 9 - 1 = 12$$

ضرب اعداد توان دار: الف) اگر پایه ها برابر باشند: یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را با هم جمع می کنیم.

مانند: $a^m \times a^n = a^{m+n}$ $4^7 \times 4^3 = 4^{10}$

ب) اگر توان ها برابر باشند: یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را در هم ضرب می کنیم.

مانند: $a^m \times b^m = (ab)^m$ $12^7 \times 3^7 = 36^7$

مثال: حاصل هر عبارت را به صورت عدد توان دار بنویسید.

$$(2/5)^3 \times 6^3 = (2/5 \times 6)^3 = 15^3$$

$$4^5 \times 12^7 \times 3^5 = 12^5 \times 12^7 = 12^{12}$$

توان و جذر

مثال: اگر $2^{10} = 1024$ باشد حاصل 2^{12} و 2^{15} را به دست آورید.

$$2^{12} = 2^{10} \times 2^2 = 1024 \times 4 = 4096$$

$$2^{15} = 2^{10} \times 2^5 = 1024 \times 32 = 32768$$

$$3^{a+2} = 3^a \times 3^2 = 5 \times 9 = 45$$

مثال: اگر $3^a = 5$ باشد حاصل 3^{a+2} را به دست آورید.

جذر یا ریشه دوم اعداد: در تساوی $[3^2 = 9, (-3)^2 = 9]$ عدد ۹ را مجذور اعداد ۳ و -۳ می گویند. و اعداد ۳ و -۳ ریشه های دوم ۹ می گویند.

نکته: هر عدد دارای دو ریشه دوم است که یکی قرینه ی دیگری است.

مانند: ریشه های دوم عدد ۳۶ برابر است با: ۶ و -۶

نکته: در جذر گیری فقط عدد مثبت آن در نظر گرفته می شود و جذر را با رادیکال ($\sqrt{\quad}$) نشان می دهند.

نکته: اعداد منفی جذر ندارند. چون مجذور هیچ عددی ؛ منفی نمی شود.

نکته: جذر اعداد صفر و یک برابر با خود آن اعداد است.

مثال: جذر اعداد زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{100} = 10$$

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{49 \times 25} = 7 \times 5 = 35$$

جذر تقریبی اعداد: برای به دست آوردن جذر تقریبی اعداد مراحل زیر را به ترتیب انجام می دهیم:

(۱) ابتدا مشخص می کنیم عدد داده شده بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد.

(۲) سپس عدد وسط دو عدد را مشخص کرده و مجذور آن را می نویسیم.

(۳) سپس اگر مجذور عدد وسطی از عدد داده شده بیشتر بود ۴ عدد کمتر از عدد وسطی و اگر از عدد داده شده کمتر بود ۴ عدد بزرگتر از عدد وسطی را می نویسیم.

(۴) داخل یک جدول مجذورهای ۴ عدد را نوشته سپس مجذور عددی که به عدد داده شده نزدیکتر بود همان جذر تقریبی عدد است.

نکته: برای این که بدانیم عدد داده شده بین کدام دو صحیح متوالی قرار دارد مجذور دو عددی را مشخص می کنیم که به عدد داده شده نزدیک باشد.

درسنامه و نکات کلیدی

(فصل هفتم)

سال هفتم

توان و جذر

مثال: مشخص عدد $\sqrt{32}$ و $\sqrt{83}$ بین کدام دو عدد قرار دارد و به کدام عدد نزدیکتر است.

$$\sqrt{32} \text{ (بین ۵ و ۶ که به ۶ نزدیکتر است)} \quad \sqrt{83} \text{ (بین ۹ و ۱۰ که به ۹ نزدیکتر است)}$$

$$\sqrt{36} < \sqrt{32} < \sqrt{25} \quad \sqrt{81} < \sqrt{83} < \sqrt{100}$$

مثال: جذر تقریبی عدد ۴۷ را به دست آورید.

مرحله ۱

عدد وسط

$$6 \rightarrow 6/5 \leftarrow 7$$

$$\sqrt{36} < \sqrt{47} < \sqrt{49}$$

مرحله ۲

مجنذور عدد وسط

$$(6/5)^2 = 42/25$$

مرحله ۳

$$42/25 < 47$$

چون مجذور عدد وسط کمتر از عدد شده مجذور

۴ عدد بزرگتر از عدد وسط را می نویسیم

$$\sqrt{47} \approx 6/8$$

مرحله ۴

عدد	۶/۶	۶/۷	۶/۸	۶/۹
مجنذور عدد	۴۳/۵۶	۴۴/۸۹	۴۶/۲۴	۴۷/۶۱

مثال: جذر تقریب عدد ۶۶ را به دست آورید.

مرحله ۱

عدد وسط

$$8 \rightarrow 8/5 \leftarrow 9$$

$$\sqrt{64} < \sqrt{66} < \sqrt{81}$$

مرحله ۲

مجنذور عدد وسط

$$(8/5)^2 = 72/25$$

مرحله ۳

$$72/25 > 66$$

چون مجذور عدد وسط بیشتر از عدد شده مجذور

۴ عدد کوچکتر از عدد وسط را می نویسیم

$$\sqrt{66} \approx 8/1$$

مرحله ۴

عدد	۸/۱	۸/۲	۸/۳	۸/۴
مجنذور عدد	۶۵/۶۱	۶۷/۲۴	۶۸/۸۹	۷۰/۵۶

نکته: یکی از کاربرد های جذر در مساحت شکل های هندسی مانند مربع و دایره است.

مثال: مساحت مربعی ۶/۲۵ شده است. طول یک ضلع مربع چند است.

$$\sqrt{6/25} = 2/5 \Rightarrow \text{خودش} \times \text{یک ضلع} = \text{مساحت مربع}$$

مثال: مساحت دایره ای ۲۸/۲۶ شده است. شعاع دایره چند است.

$$\text{شعاع دایره} \Rightarrow \sqrt{9} = 3 \Rightarrow \frac{28/26}{3/14} = 9 \Rightarrow \text{شعاع} \times \text{شعاع} = 3/14 \Rightarrow \text{مساحت دایره}$$