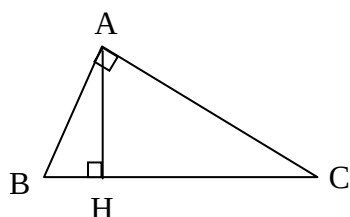


قسمت اول: هندسه

مثث قائم الزاویه:



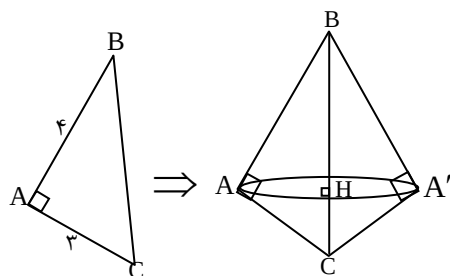
$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

$$\overline{AH}^2 = \overline{HB} \times \overline{HC}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AC}^2 = \overline{CH} \times \overline{BC} \\ \overline{AB}^2 = \overline{BH} \times \overline{BC} \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \right)^2 = \frac{\overline{HC}}{\overline{HB}}$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \overline{AH} \times \overline{BC}$$

مثال: مثلث قائم الزاویه ABC ، $(\hat{A} = 90^\circ)$ را حول ضلع BC دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل چه قدر است؟

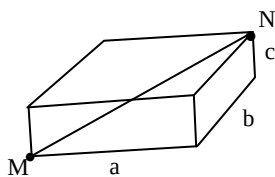


$$V = \frac{1}{3} \pi \times \overline{AH}^2 \times \overline{BC}$$

$$\overline{AH} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{\overline{BC}}$$

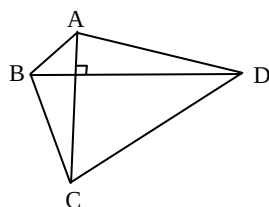
فیثاغورس:

اندازه‌ی قطر مکعب مستطیل:



$$\overline{MN} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

نکته: در هر چهارضلعی که قطرهايش برهم عموداند، داریم:

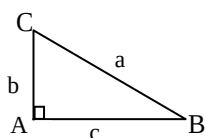


$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2$$

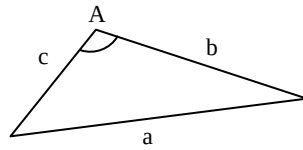
نکته: اگر ضلع مقابل به A را با a ، و ضلع مقابل به B را با b و ضلع مقابل به C را با c نمایش دهیم،

داریم:

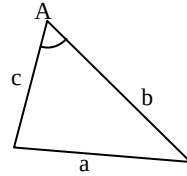
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$



$$a^2 > b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} > 90^\circ$$



$$a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} < 90^\circ$$

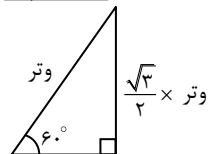
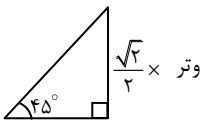
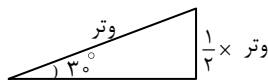


نکته: در هر مثلث قائم الزاویه :

- ضلع مقابل به زاویه ی 30° درجه، نصف وتر است.

- ضلع مقابل به زاویه ی 45° درجه، $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وتر است.

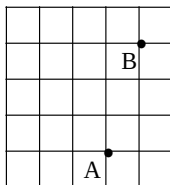
- ضلع مقابل به زاویه ی 60° درجه، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است.



نکته: مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر است با $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$.

سوال ۱: در صفحه ی شطرنجی زیر، یک مورچه می‌خواهد از نقطه ی A به نقطه ی B که در پشت این صفحه است، برود. اگر طول هر پاره خط کوچک، ۱ واحد باشد، طول کوتاه‌ترین مسیری که مورچه باید طی کند،

چقدر است؟



(۱) $2\sqrt{3}$

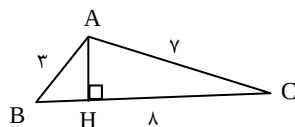
(۲) $3\sqrt{2}$

(۳) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

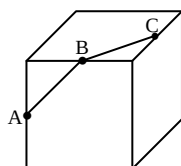
(۴) $\sqrt{20}$

سوال ۲: در مثلث ABC، ارتفاع نظیر ضلع ۸ سانتی‌متری را رسم کردیم. در این صورت اندازه ی HC چه قدر

است؟ اندازه ی زاویه ی B، چند درجه است؟



سوال ۳: در مکعب مقابل، اندازه ی زاویه ی B، چند درجه است؟ نقاط A و B و C، وسط اضلاع هستند.



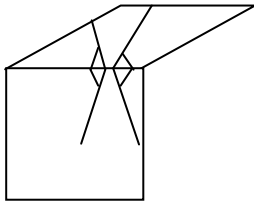
(۱) 150°

(۲) 135°

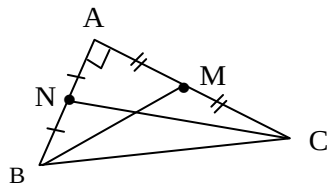
(۳) 120°

(۴) 90°

نکته: هرگاه ۲ صفحه برهم عمود باشند. هر دو خطی که روی یال مشترک با یکدیگر برخورد می‌کنند، برهم عمودند.



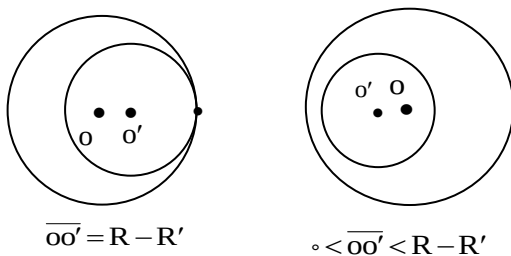
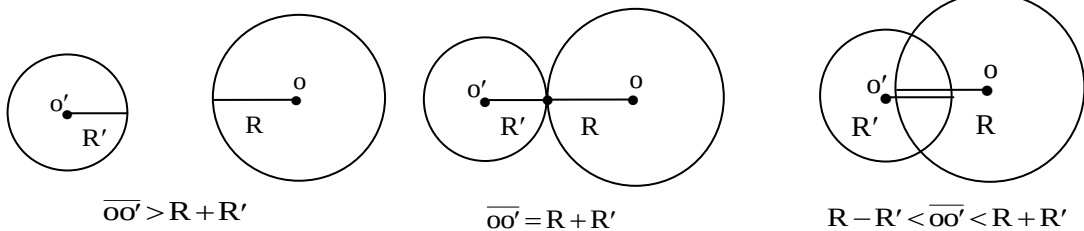
نکته: در هر مثلث قائم الزاویه، مجموع مربعات دو میانه‌ی نظیر ضلع‌های قائم، برابر است با $\frac{5}{4}$ مربع وتر است:



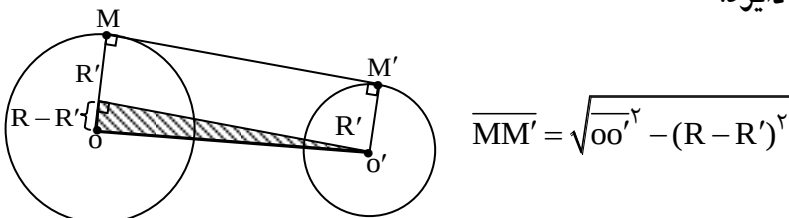
$$\overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 = \frac{5}{4} \overline{BC}^2$$

دایره:

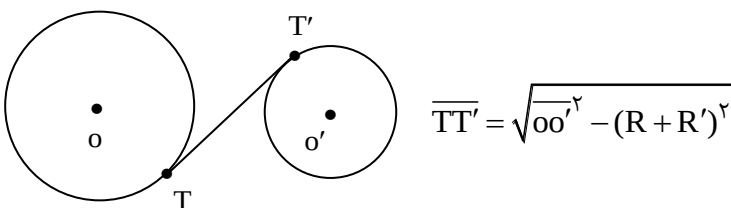
وضعیت ۲ دایره نسبت به هم:



نکته: طول مماس مشترک خارجی دو دایره:

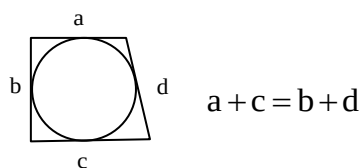


نکته: طول مماس مشترک داخلی دو دایره:

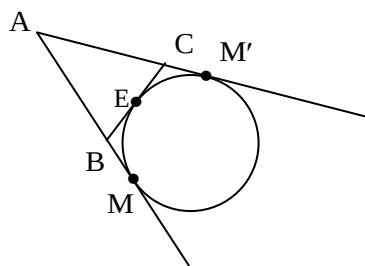


نکته: هرگاه بر دایره‌ای ۲ مماس رسم کنیم، طول مماس‌ها باهم برابر است.

نتیجه: در چهارضلعی محیطی همواره داریم:

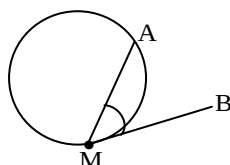


نتیجه: در شکل زیر، محیط مثلث ABC همواره ثابت است و مستقل از حالت قرار گرفتن مماس BC بر دایره است. زیرا $\overline{BE} = \overline{BM}$ و همچنین $\overline{CE} = \overline{CM'}$ است.



رابطه‌های زیر را در دایره‌ها به خاطر بسپارید:

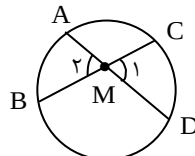
$$\hat{M} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$



۱- زاویه ی ظلی

$$\text{زاویه: } \hat{M}_1 = \hat{M}_2 = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$$

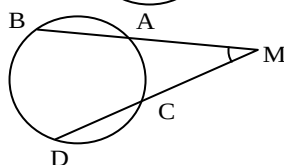
$$\text{ضلع: } \overline{MA} \times \overline{MD} = \overline{MB} \times \overline{MC}$$



۲- زاویه ی داخلی

$$\text{زاویه: } \hat{M} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{2}$$

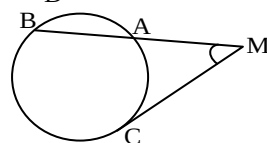
$$\text{ضلع: } \overline{MA} \times \overline{MB} = \overline{MC} \times \overline{MD}$$



۳- زاویه ی خارجی

$$\text{زاویه: } \hat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AC}}{2}$$

$$\text{ضلع: } \overline{MA} \times \overline{MB} = \overline{MC}^2$$

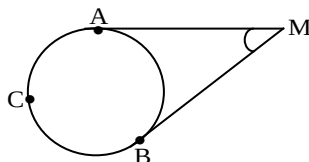


۴- زاویه ی خارجی با یک ضلع مماس

$$\text{زاویه: } \hat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{AB}}{2}$$

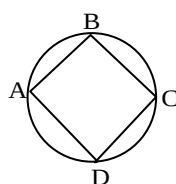
$$\text{زاویه: } \hat{M} + \widehat{AB} = 180^\circ$$

$$\text{ضلع: } \overline{MA} = \overline{MB}$$



۵- زاویه ی خارجی با دو ضلع مماس

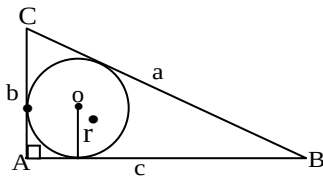
$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$



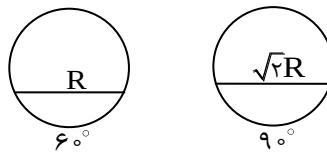
۶- چهارضلعی محاطی

نکته: شعاع دایره‌ی محاطی در هر مثلث قائم‌الزاویه با وتر a و با ضلع‌های قائم b و c از رابطه‌ی

$$r = \frac{b+c-a}{2} \text{ به دست می‌آید:}$$



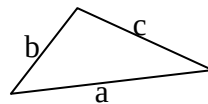
نکته: وترهای نظیر کمان‌های 60° و 90° درجه برحسب R برابرند با:



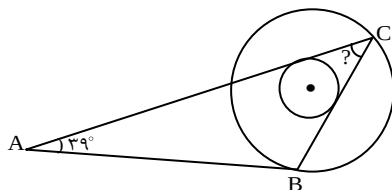
نکته: مساحت مثلث ABC با ضلع‌های a , b و c برابر است با:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} \text{ نصف محیط}$$



سوال ۴: در شکل زیر دو دایره‌ی هم‌مرکز وجود دارد که در آن وتر BC بر دایره‌ی کوچک‌تر مماس شده است. از A ، مماس AB را بر دایره‌ی بزرگ‌تر و مماس AC را بر دایره‌ی کوچک‌تر رسم می‌کنیم. اگر



$\hat{A} = 39^\circ$ باشد. اندازه‌ی زاویه‌ی C چند درجه است؟

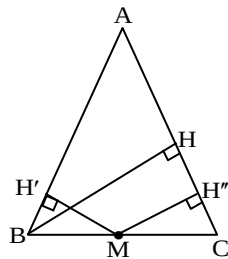
- | | |
|--------|--------|
| ۴۲ (۲) | ۳۴ (۱) |
| ۵۲ (۴) | ۴۵ (۳) |

هندسه‌ی نهم: همنهشتی

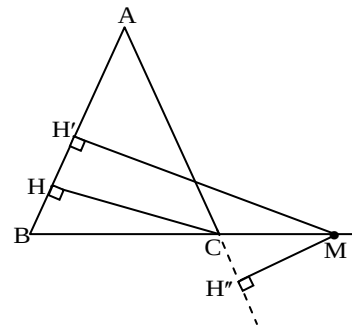
سوال ۵: کدام عبارت زیر درست است؟

- الف) اگر محیط دو مثلث باهم برابر باشند، دو مثلث با یک‌دیگر همنهشت‌اند.
- ب) اگر مساحت دو مثلث باهم برابر باشند، دو مثلث با یک‌دیگر همنهشت‌اند.
- ج) اگر هم محیط و هم مساحت دو مثلث با یک‌دیگر برابر باشند، دو مثلث همنهشت‌اند.
- د) اگر محیط و یک زاویه از مثلثی با محیط و یک زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث با یک‌دیگر همنهشت‌اند.
- ه) اگر محیط و دو زاویه از مثلثی با محیط و دو زاویه از مثلثی برابر باشند، دو مثلث با یک‌دیگر همنهشت‌اند.

نکته: در هر مثلث متساوی الساقین داریم:

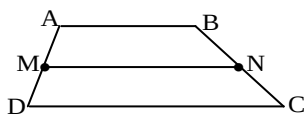


$$\overline{MH'} + \overline{MH''} = \overline{BH}$$



$$\overline{MH'} - \overline{MH''} = \overline{CH}$$

نکته: در هر دوزنقه هرگاه وسط دو ساق را به هم وصل کنیم، داریم:



$$\overline{MN} = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2}$$

تشابه:

سوال ۶: کدام جمله درست است؟

۱- دو چند ضلعی منتظم، همواره با هم متشابه هستند.

۲- دو n ضلعی منتظم همواره باهم متشابه هستند.

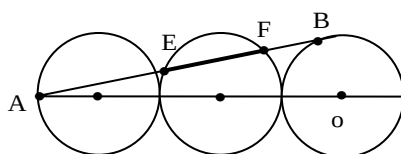
نکته: در دو مثلث متشابه، نسبت ضلع‌ها، نسبت نیم‌سازها، نسبت ارتفاع‌ها، نسبت میانه‌ها و نسبت محیط‌ها با نسبت تشابه دو مثلث برابر است.

نکته: در دو شکل متشابه، نسبت مساحت‌ها، با مجذور نسبت تشابه آن‌ها برابر است.

نکات تشابه در مثلث‌های قائم‌الزاویه:

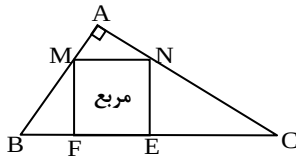
- برابر بودن یک زاویه‌ی تند.
- متناسب بودن ضلع‌های قائم.
- متناسب بودن وتر و یک ضلع.
- متناسب بودن وترها و ارتفاع‌های نظیر دو وتر.

سوال ۷: در شکل زیر، ۳ دایره‌ی مساوی با شعاع ۱۰ سانتی‌متر برهم مماس‌اند و مرکز آن‌ها روی یک خط راست قرار دارد. اگر مماس AB را رسم کنیم، طول وتر EF چند سانتی‌متر است؟



- (۱) ۱۶
- (۲) ۱۲
- (۳) ۸
- (۴) ۶

سوال ۸: در شکل زیر چند جفت مثلث متشابه وجود دارد؟



- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

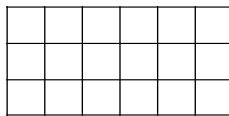
نکته: در شکل فوق، داریم:

$$\overline{BF} \times \overline{EC} = \text{مساحت مربع}$$

نکته: هر شکل با خودش همزهشت و متشابه است.

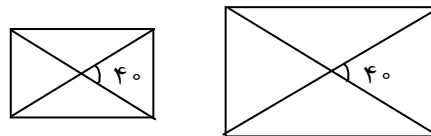
نکته: در دو مستطیل متشابه، نسبت عرض به طول آن‌ها باهم برابر است.

سوال ۹: در شکل زیر چند مستطیل متشابه با مستطیل بزرگ وجود دارد؟

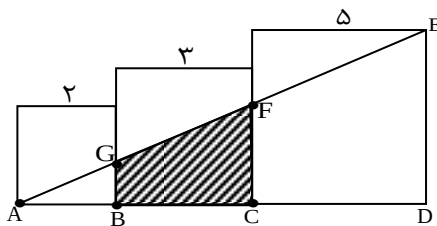


- (۱) ۲۶
(۲) ۲۸
(۳) ۳۴
(۴) ۴۰

نکته: دو مستطیل که زاویه‌ی بین قطرهایشان باهم برابر باشد، با یکدیگر متشابه هستند.

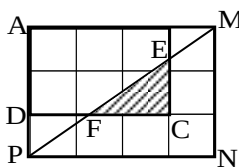


سوال ۱۰: مساحت قسمت رنگی چند واحد است؟



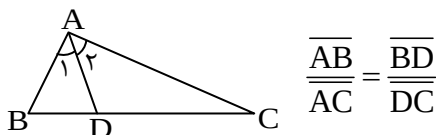
- (۱) ۴
(۲) ۴/۷۵
(۳) ۵/۲۵
(۴) ۵/۵

سوال ۱۱: در شکل زیر، مساحت قسمت مشترک دو شکل چند واحد است؟



- (۱) ۲۵/۲۴
(۲) ۱۰/۹
(۳) ۵/۴
(۴) ۶/۵

نکته: در هر مثلث با رسم نیم‌ساز داریم:



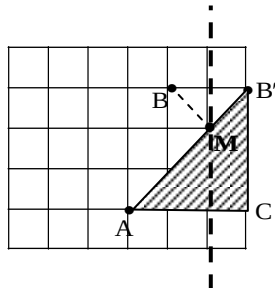
اثبات از طریق مساحت.

نکته: هرگاه مختصات رئوس شکل را a برابر کنیم، شکل به وجود آمده با شکل اولیه متشابه است. نسبت

محیط این دو شکل، a و نسبت مساحت این دو شکل، a^2 است.

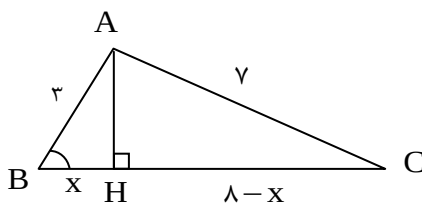
پاسخنامه تشریحی سؤالات قسمت اول (هندسه)

۱- گزینه‌ی (۲)



$$\begin{aligned}\overline{AB'}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{CB'}^2 \\ \Rightarrow \overline{AB'}^2 &= 3^2 + 3^2 = 18 \\ \overline{AB'} &= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

۲-

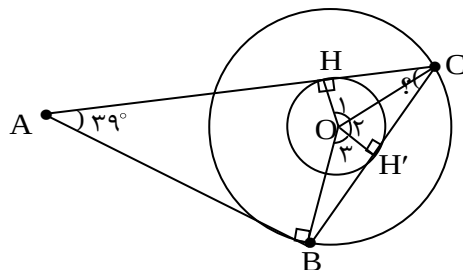


$$\begin{aligned}\overline{AH}^2 &= 3^2 - x^2 \\ \overline{AH}^2 &= 7^2 - (8-x)^2 \\ \Rightarrow 9 - x^2 &= 49 - 64 - x^2 + 16x \Rightarrow x = \frac{24}{16} = 1.5 \Rightarrow HC = 6.5\end{aligned}$$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH، چون $\overline{BH}$ نصف AB است، پس $\hat{BAH} = 30^\circ$ و در نتیجه $\hat{B} = 60^\circ$ درجه است.

۳- گزینه‌ی (۴) ۹۰ درجه

۴- گزینه‌ی (۱)



در چهار ضلعی AHOB، $\hat{A} + \hat{HOB} = 180^\circ$ پس $\hat{HOB} = 141^\circ$

از طرفی مثلث‌های OHC و OH'C و OH'B، با یکدیگر هم‌نهشت هستند پس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3$ است. پس مجموع سه زاویه $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ و $\hat{O}_3$ برابر است با:

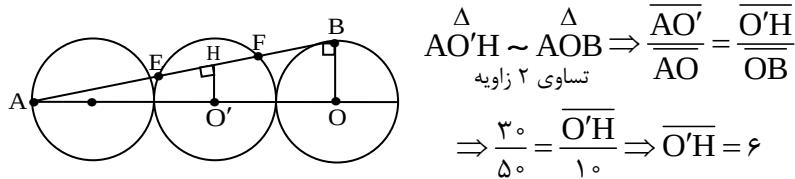
$$360 - 141 = 219$$

پس زاویه‌ی O_1 می‌شود $219 \div 3 = 73$ در نتیجه زاویه‌ی HOH' می‌شود، $146 = 2 \times 73$ و در نتیجه زاویه‌ی C، ۳۴ درجه است.

۵- گزینه‌ی (هـ)

۶- گزینه‌ی (۲)

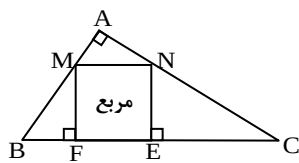
۷- گزینه‌ی (۱)



رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث O'EH:

$$O'H^2 + EH^2 = O'E^2 \Rightarrow 6^2 + EH^2 = 10^2 \Rightarrow EH = 8 \Rightarrow EF = 16$$

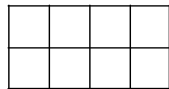
۸- گزینه‌ی (۴)



$$\begin{aligned} &(\triangle AMN, \triangle BMF), (\triangle AMN, \triangle ENC) \\ &(\triangle BMF, \triangle ENC), (\triangle AMN, \triangle ABC) \\ &(\triangle BMF, \triangle ABC), (\triangle ENC, \triangle ABC) \end{aligned}$$



۱۵



۶



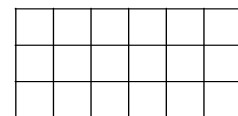
۱۲

مستطیل بزرگ

۱

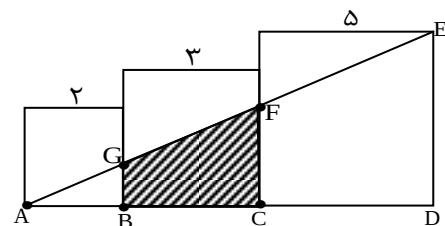
$$15 + 6 + 12 + 1 = 34$$

۹- گزینه‌ی (۳)



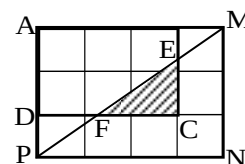
۱۰- گزینه‌ی (۳)

$$\begin{aligned} \triangle AFC \sim \triangle AED &\Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{FC}{ED} \Rightarrow FC = 2/5 \\ \triangle ABG \sim \triangle AFC &\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BG}{FC} \Rightarrow BG = 1 \\ S_{BCFG} &= \frac{(2/5 + 1) \times 3}{2} = 5/2 \end{aligned}$$



۱۱- گزینه‌ی (۱)

$$\begin{aligned} \triangle BME \sim \triangle MAP &\Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{BE}{AP} \Rightarrow BE = \frac{3}{4} \\ EC = BC - BE &= 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \\ \triangle PDF \sim \triangle PAM &\Rightarrow \frac{FD}{AM} = \frac{PD}{AP} \Rightarrow FD = \frac{4}{3} \\ FC = DC - FD &= 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow S_{\triangle EFC} = \frac{\frac{5}{4} \times \frac{5}{3}}{2} = \frac{25}{24} \end{aligned}$$



قسمت دوم: مجموعه‌ها و احتمال

سوال ۱: اگر $A_1 = \{1\}, A_2 = \{2, 3\}, A_3 = \{4, 5, 6\}, A_4 = \{7, 8, 9, 10\}$ باشد، در این صورت مجموعه‌ی A_1 با چه عددی شروع می‌شود؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۴۶ (۳) ۵۵ (۴) ۵۶

نکته: در نمایش مجموعه‌ها با علائم ریاضی، اگر $(-1)^n$ یا $(-1)^{n+1}$ به کار رود، عضوهای یکی در میان منفی و مثبت می‌شوند و اگر $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ یا $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}+1}$ استفاده شود، عضوهای دو تا در میان منفی و مثبت می‌شوند.

نکته: برای به دست آوردن تعداد شمارنده‌های طبیعی هر عدد، آن عدد را به عوامل اول تجزیه کرده و سپس به هر توان ۱ واحد اضافه کرده و توان‌های جدید را در هم ضرب می‌کنیم.

سوال ۲: مجموعه‌ی $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{1620}{x} \in \mathbb{Z} \right\}$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۴۰ (۳) ۳۰ (۴) ۲۰

نکته: اگر A یک مجموعه‌ی n عضوی باشد به‌طوری که مجموع عضوهای آن عدد M باشد، مجموع عضوهای همه‌ی زیرمجموعه‌های A برابر است با: $2^{n-1} \times M$

سوال ۳: همه‌ی زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A = \{-3, -2, 0, 1, 2\}$ را نوشتیم. مجموع عضوهای همه‌ی زیرمجموعه‌های A چه قدر است؟

- (۱) ۶۴ (۲) ۳۲ (۳) -۳۲ (۴) -۶۴

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های فرد عضوی هر مجموعه با تعداد زیرمجموعه‌های زوج عضوی آن برابر است و تعداد هر کدام 2^{n-1} است. (n تعداد کل عضوهاست)

سوال ۴: تعداد زیرمجموعه‌های فرد عضوی مجموعه‌ی $A = \{2, 5, 8, \dots, 104\}$ چندتا است؟

- (۱) 2^{104} (۲) 2^{53} (۳) 2^{34} (۴) 2^{30}

نکته: تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء برابر است با ترکیب r از n :

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

سوال ۵: یک مجموعه‌ی ۱۰ عضوی، چند زیرمجموعه‌ی ۳ عضوی دارد؟

- (۱) ۱۲۸ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۰۰ (۴) ۶۴

سؤال ۶: به چند طریق می توان ۳ زیرمجموعه غیر تهی A و B و C از مجموعه $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ نوشت به طوری که رابطه $A \cap B = C$ برقرار باشد؟

- (۱) 2^5 (۲) 4^5 (۳) 3^5 (۴) 5^4

* مجموعه اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰ را در نظر گرفته و به سؤالات زیر پاسخ دهید، چند زیرمجموعه می توان نوشت که:

سؤال ۷: حتماً عضوهای ۳ و ۵ را دارا است؟

- (۱) 2^8 (۲) 2^6 (۳) 2^5 (۴) 2^3

سؤال ۸: شامل عضوهای ۳ و ۵ باشد ولی عضوهای ۷ و ۸ و ۹ را شامل نباشد؟

- (۱) 2^4 (۲) 2^5 (۳) 2^6 (۴) 2^7

سؤال ۹: اختلاف بزرگ ترین و کوچک ترین عضو آن، دقیقاً ۸ باشد؟

- (۱) 2^6 (۲) 2^7 (۳) 2^8 (۴) 2^9

سؤال ۱۰: اختلاف بزرگ ترین و کوچک ترین عضو آن، حداقل ۸ باشد؟

- (۱) 2^9 (۲) 2^8 (۳) 2^7 (۴) 2^6

نکته: به مجموعه ای که فقط یک عضو داشته باشد، مجموعه ی یکانی می گویند.

سؤال ۱۱: مجموعه های A ، B و C به ترتیب دارای ۲، ۳ و ۴ عضو هستند و هر دو تایشان حداقل یک عضو مشترک دارند. $A \cup B \cup C$ حداقل و حداکثر چند عضو دارد؟

- (۱) ۷، ۴ (۲) ۴، ۲ (۳) ۹، ۲ (۴) ۹، ۳

سؤال ۱۲: چند زیرمجموعه ی متمایز از مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ می توان نوشت به طوری که هر دو زیرمجموعه دلخواه آن، حداقل در ۲ عضو مشترک باشند؟

- (۱) 2^4 (۲) 2^3 (۳) 2^2 (۴) 2^1

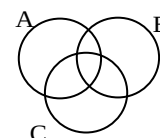
نکته:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$



نکته:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$



سؤال ۱۳: تعداد اعداد طبیعی کوچک تر یا مساوی با ۲۱۰ که بر ۲ یا ۳ یا ۵ بخش پذیر باشند، چند تا است؟

- (۱) ۱۴۸ (۲) ۱۴۷ (۳) ۱۵۴ (۴) ۱۵۲

سؤال ۱۴: A و B و C، سه مجموعه هستند و می‌دانیم تعداد عضوهای $A-B$ ، $B-C$ ، $B-A$ و $C-A$ و $C-B$ به ترتیب برابر ۳، ۲، ۴ و ۵ است. تعداد عضوهای مجموعه $A-C$ چند تا است؟

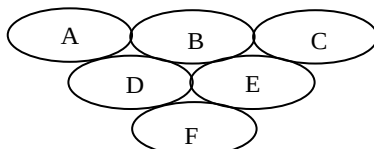
- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

نکته:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n$$

سؤال ۱۵: A و B و C، سه مجموعه دلخواه هستند و از سطر دوم به بعد، هر مجموعه تفاضل دو مجموعه بالای سر خودش است (سمت چپ منهای سمت راست) مثلاً $D = A - B$. در این صورت کدام گزینه حتماً درست است؟



(۳) $F \subseteq (A \cap C)$

(۲) $B \subseteq F$

(۱) $F \subseteq C$

(۵) $(D \cap C) \subseteq F$

(۴) $(A \cap C) \subseteq F$

* در یک کیسه، ۵ توپ قرمز، ۴ توپ آبی و ۳ توپ سیاه وجود دارد. ۲ توپ به تصادف، یکی پس از دیگری بدون جایگزینی، از کیسه برداشتیم. به سؤالات زیر پاسخ دهید.

سؤال ۱۶: احتمال آن که توپ اول قرمز و توپ دوم آبی باشد، چه قدر است؟

- (۱) $\frac{5}{33}$ (۲) $\frac{12}{33}$ (۳) $\frac{10}{33}$ (۴) $\frac{1}{6}$

سؤال ۱۷: احتمال آن که یک توپ قرمز و دیگری آبی باشد، چه قدر است؟

- (۱) $\frac{12}{33}$ (۲) $\frac{10}{33}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{6}$

سؤال ۱۸: احتمال آن که دو توپ، هم‌رنگ باشند، چه قدر است؟

- (۱) $\frac{3}{11}$ (۲) $\frac{10}{33}$ (۳) $\frac{19}{66}$ (۴) $\frac{1}{3}$

سؤال ۱۹: احتمال آن که دو توپ هم‌رنگ نباشند، چه قدر است؟

- (۱) $\frac{47}{66}$ (۲) $\frac{15}{33}$ (۳) $\frac{23}{33}$ (۴) $\frac{19}{66}$

سؤال ۲۰: در پرتاب ۳ تاس، احتمال این که مجموع اعداد رو شده، بزرگ‌تر از ۵ باشد، چه قدر است؟

- (۱) $\frac{209}{216}$ (۲) $\frac{206}{216}$ (۳) $\frac{201}{216}$ (۴) $\frac{187}{216}$

سؤال ۲۱: علی ارقام یک تا ۹ را روی ۹ کارت نوشت و در کیسه‌ای انداخت. سپس ۴ کارت از آن پی‌درپی و بدون جایگذاری خارج می‌کند و آن‌ها را به ترتیب بعد از بیرون آمدن کنار هم قرار می‌دهد. احتمال آن که عدد ۴ رقمی به دست بیاید که اختلاف رقم یکان و هزارگان آن ۴ باشد، چه قدر است؟

- (۱) $\frac{5}{18}$ (۲) $\frac{5}{36}$ (۳) $\frac{5}{72}$ (۴) $\frac{5}{27}$

سؤال ۲۲: اگر $P(A) + P(B) + P(C) = \frac{9}{4}$ باشد، کمترین مقدار عبارت $P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{5}$

احتمال‌های غیرهم‌شانس

سؤال ۲۳: سه دوندۀ a_1 ، a_2 و a_3 با هم مسابقه می‌دهند. اگر احتمال برد a_1 ، ۲ برابر احتمال برد a_2 و احتمال برد a_2 ، دو برابر احتمال برد a_3 باشد، احتمال این که a_1 یا a_2 برنده شود، چقدر است؟

- (۱) $\frac{6}{7}$ (۲) $\frac{7}{8}$ (۳) $\frac{8}{9}$ (۴) $\frac{9}{10}$

سؤال ۲۴: نقطه‌ای به تصادف داخل مربعی به ضلع ۴ واحد انتخاب می‌کنیم. احتمال این که فاصله‌ی این نقطه از نزدیک‌ترین رأس مربع، کوچک‌تر از ۲ باشد، چقدر است؟

- (۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{5}$ (۴) $\frac{\pi}{6}$

سؤال ۲۵: فرض می‌کنیم دو قطعه چوب داریم که طول آن‌ها به ترتیب ۱ و $\frac{5}{10}$ متر است. قطعه‌ی بزرگ‌تر را دو قسمت می‌کنیم که در نتیجه ۳ قطعه چوب حاصل می‌شود. احتمال این که سه قطعه چوب تشکیل یک مثلث بدهند، چقدر است؟

- (۱) $\frac{5}{25}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{5}{10}$ (۴) ۱

پاسخنامه تشریحی سؤالات قسمت دوم (مجموعه‌ها و احتمال)

۱- گزینه (۲) به آخرین عدد در هر مجموعه توجه کنید:

$$A_1 \rightarrow 1, \quad A_2 \rightarrow 1+2=3, \quad A_3 \rightarrow 1+2+3=6, \quad A_4 \rightarrow 1+2+3+4=10$$

پس آخرین عدد در مجموعه A_9 ، $1+2+3+\dots+9=45$ و در نتیجه A_{10} با $45+1=46$ شروع می‌شود.

۲- گزینه (۱)

$$1620 = 2^2 \times 3^4 \times 5 \rightarrow (2+1) \times (4+1) \times (1+1) = 3 \times 5 \times 2 = 30 \Rightarrow 30 \times 2 = 60$$

۳- گزینه (۳)

$$2^{n-1} \times M = 2^4 \times \left[\underbrace{-3 + (-2) + 0 + 1 + 2}_{-2} \right] = -32$$

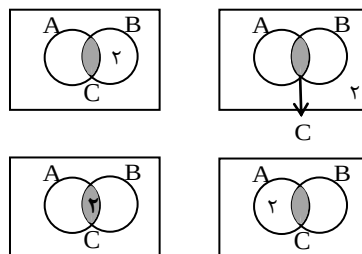
۴- گزینه (۳)

$$\text{تعداد} = \frac{104-2}{3} + 1 = 34 + 1 = 35 \Rightarrow 2^{35-1} = 2^{34}$$

۵- گزینه (۲)

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \times (10-3)!} = \frac{10!}{3! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times \cancel{7!}}{3! \times \cancel{7!}} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

۶- گزینه (۲)



هر عضو، ۴ حالت می‌تواند داشته باشد، پس در کل می‌توان $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5$ مجموعه با شرط

$A \cap B = C$ نوشت.

۷- گزینه (۱)

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$$

$$\text{تعداد انتخابها} \rightarrow 2 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8$$

۸- گزینه (۲)

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$$

$$\text{تعداد انتخابها} \rightarrow 2 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 \times 2 = 2^5$$

۹- گزینه (۳)

$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow 1 \text{ کوچکترین عضو} \\ \rightarrow 9 \text{ بزرگترین عضو} \end{array} \right\} \Rightarrow 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \rightarrow 2^7$$

$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow 2 \text{ کوچکترین عضو} \\ \rightarrow 10 \text{ بزرگترین عضو} \end{array} \right\} \Rightarrow 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \rightarrow 2^7$$

$$\Rightarrow 2^7 + 2^7 = 2 \times 2^7 = 2^8$$

۱۰- گزینه (۱) حداقل ۸ یعنی ۸ یا ۹ باشد:

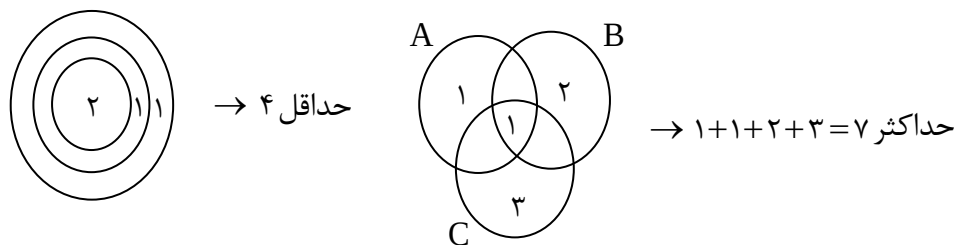
$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow 1 \text{ کوچکترین عضو} \\ \rightarrow 10 \text{ بزرگترین عضو} \end{array} \right\} \Rightarrow 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \rightarrow 2^8$$

با توجه به حل سؤال ۹، 2^8 زیرمجموعه نیز می‌توان برای ۸ اختلاف نوشت.

$$2^8 + 2^8 = 2 \times 2^8 = 2^9$$

پس مجموع آن‌ها برابر است با:

۱۱- گزینه (۱)



۱۲- گزینه (۳) زیرمجموعه‌های ۴ عضوی، ۵ عضوی و ۶ عضوی جواب مسأله هستند:

$$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 15 + 6 + 1 = 22$$

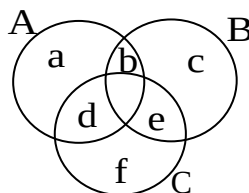
۱۳- گزینه (۳)

$$n(2 \text{ بر } 3 \text{ یا } 5) = n(2 \text{ بر } 3) + n(2 \text{ بر } 5) - n(2 \text{ بر } 3 \text{ و } 5)$$

$$= 210 \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor + 210 \left\lfloor \frac{2}{5} \right\rfloor - 210 \left\lfloor \frac{2}{15} \right\rfloor = 140 + 84 - 28 = 196$$

۱۴- گزینه (۳) با رسم نمودار ون داریم:

رابطه (۱) $n(A - B) = a + d = 3$
 رابطه (۲) $n(B - C) = b + c = 2$
 رابطه (۳) $n(B - A) = e + c = 2$
 رابطه (۴) $n(C - A) = e + f = 4$
 رابطه (۵) $n(C - B) = f + d = 5$

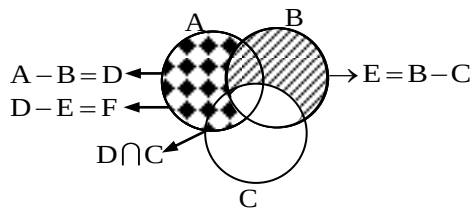


$$(3) + (5) \Rightarrow (e + c) + (f + d) = 7 \Rightarrow (c + d) + (f + e) = 7 \Rightarrow \boxed{c + d = 3}$$

$$(1) + (2) = (a + d) + (b + c) = 3 + 2 = 5$$

$$\Rightarrow (a + b) + (c + d) = 5 \Rightarrow (a + b) = 2 \Rightarrow n(A - C) = a + b = 2$$

۱۵- گزینه (۵) با تبدیل به نمودار ون داریم:



با توجه به نمودار مقابل، قسمت رنگی در سمت چپ شکل، $A-B=D$ است و قسمت رنگی در سمت راست شکل، $B-C=E$ است و $D \cap E$ تهی است. پس $F=D-E=D$ است و اشتراک D با C، زیرمجموعه خودش است پس $(D \cap C) \subseteq F$.

۱۶- گزینه (۱)

توپ دوم آبی و توپ اول قرمز

$$\frac{5}{12} \times \frac{4}{11} = \frac{5}{33}$$

۱۷- گزینه (۲)

دیگری آبی و یک توپ قرمز

توپ دوم قرمز و توپ اول آبی یا توپ دوم آبی و توپ اول قرمز

$$\left(\frac{5}{12} \times \frac{4}{11}\right) + \left(\frac{4}{12} \times \frac{5}{11}\right) = \frac{10}{33}$$

۱۸- گزینه (۳) دو توپ هم رنگ باشند:

دومی سیاه و اولی سیاه یا دومی آبی و اولی آبی یا دومی قرمز و اولی قرمز

$$\left(\frac{5}{12} \times \frac{4}{11}\right) + \left(\frac{4}{12} \times \frac{3}{11}\right) + \left(\frac{3}{12} \times \frac{2}{11}\right) = \frac{5}{33} + \frac{1}{11} + \frac{1}{22} = \frac{19}{66}$$

۱۹- گزینه (۱) دو توپ هم رنگ نباشند:

احتمال هم رنگ بودن = ۱ - احتمال هم رنگ نبودن + احتمال هم رنگ بودن

$$\Rightarrow 1 - \frac{19}{66} = \frac{47}{66}$$

۲۰- گزینه (۱)

$$(1,1,1), (2,1,1), (1,2,1), (1,1,2), (2,2,1), (2,1,2), (1,2,2)$$

$$6 \times 6 \times 6 = 216 \Rightarrow 216 - 7 = 209 \Rightarrow \frac{209}{216}$$

۲۱- گزینه (۲)

۵ جفت عدد که می توان جای یکان و هزارگان را عوض کرد. اختلاف آن ها ۴ است.

$$\frac{5 \times 7 \times 6 \times 2}{9 \times 8 \times 7 \times 6} = \frac{5}{36}$$

۲۲- گزینه (۴)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

$$P(A \cap C) \geq P(A) + P(C) - 1$$

$$P(B \cap C) \geq P(B) + P(C) - 1$$

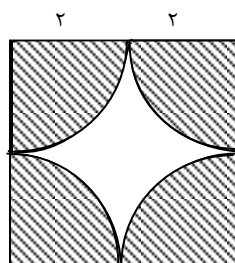
$$\Rightarrow P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) \geq \underbrace{2(P(A) + P(B) + P(C))}_{\frac{9}{4}} - 3 = \frac{3}{4} = 1/5$$

۲۳- گزینه (۱)

$$P(a_1) + P(a_2) + P(a_3) = 1 \Rightarrow 4P(a_3) + 2P(a_2) + P(a_1) = 1$$

$$\Rightarrow P(a_3) = \frac{1}{7} \Rightarrow P(a_2) = \frac{2}{7}, P(a_1) = \frac{4}{7} \Rightarrow P(a_1) + P(a_2) = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$$

۲۴- گزینه (۲)

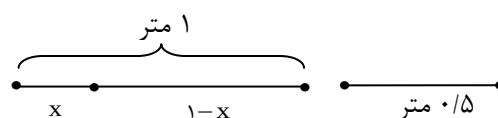


$$\text{احتمال} = \frac{\text{مساحت ۴ ربع دایره}}{\text{مساحت مربع}} = \frac{2 \times 2 \times \pi}{4 \times 4} = \frac{\pi}{4}$$

۲۵- گزینه (۳) طبق نامساوی مثلثی، هر ضلع باید از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر و از تفاضل آنها بزرگتر باشد. سه قطعه چوب داریم:

$$\left. \begin{aligned} x + 0.5 > 1 - x &\Rightarrow x > 0.25 \\ (1 - x) + 0.5 > x &\Rightarrow x < 0.75 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \{x | 0.25 < x < 0.75\}$$

$$\Rightarrow \text{احتمال} = \frac{0.75 - 0.25}{1} = \frac{0.5}{1} = 0.5$$



قسمت سوم: معادله‌ی خط

سوال ۱: نمودار $3x^2y + 2xy^2 - 6xy = 0$ نمایش است.

توجه: قرینه نسبت به محور طول، محور عرض، مبدأ، نیم‌ساز ناحیه‌ی ۱ و ۳ و نیم‌ساز ناحیه‌ی ۲ و ۴ را بدانید.

سوال ۲: معادله‌ی قرینه‌ی خط $3x - 2y = 1$ نسبت به محور طول کدام است؟

$$(1) \quad 3x + 2y = 1 \quad (2) \quad 2x - 3y = 1$$

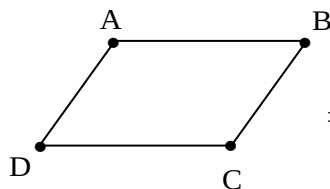
$$(3) \quad 3x - 2y = 1 \quad (4) \quad x + y = 1$$

نکته: مختصات نقطه‌ی وسط پاره‌خط AB:



$$M = \frac{A+B}{2}$$

نکته: در مربع، مستطیل، لوزی و متوازی‌الاضلاع، مجموع مختصات دو رأس مقابل، با مجموع مختصات دو رأس مقابل دیگر، برابر است:



$$\Rightarrow A + C = B + D$$

نکته: حرکات شتابدار، خطی نیستند. مثلاً برخواستن یا نشستن هواپیما، انداختن سنگ یا تیر. همچنین مساحت دایره نسبت به شعاع یا حاصل‌ضرب ۲ عدد صحیح متوالی، رابطه‌ی خطی نیستند.

نکته: معادله‌ی خط‌های مبدأ گذر که از نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ می‌گذرند، به صورت $y = \frac{y_A}{x_A}x$ است.

مثال: معادله‌ی خطی که از مبدأ و نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ عبور می‌کند، $y = \frac{-3}{5}x$ است.

سوال ۳: زاویه‌ای که خط $y = -\sqrt{3}x$ با جهت مثبت محور طول می‌سازد، چند درجه است؟

$$(1) \quad 30^\circ$$

$$(2) \quad 60^\circ$$

$$(3) \quad 120^\circ$$

$$(4) \quad 150^\circ$$

نکته: در سوالاتی که می‌گویند به‌ازای تمام مقادیر m یا a ، اجازه داریم هر عددی حقیقی را به‌جای m یا a قرار دهیم.

سوال ۴: خط با معادله $(2a+1)x + (3a+1)y + a = 0$ به ازای جميع مقادير a ، از کدام یک از نقاط زیر می گذرد؟

(۱) $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

سوال ۵: بر روی خط $3x + 5y = 37$ ، چند نقطه با مختصات طبیعی وجود دارد؟

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) بی شمار

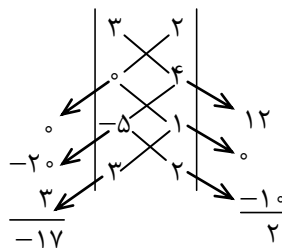
نکته: معادله خطی که طول از مبدأ آن p و عرض از مبدأ آن q می باشد، از رابطه $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ به دست می آید.

مثال: معادله خطی بنویسید که طول از مبدأ آن $\frac{1}{3}$ و عرض از مبدأ آن -2 باشد.

$$\frac{x}{\frac{1}{3}} + \frac{y}{-2} = 1 \Rightarrow 3x - \frac{1}{2}y = 1$$

نکته: مساحت مثلثی که مختصات رئوس آن داده شده است (روش بند کفشی):

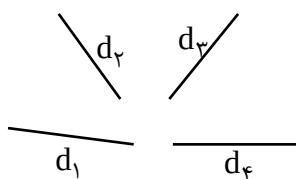
مثال: مساحت مثلثی که مختصات رئوس آن $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ می باشد، چند واحد است؟



$$\Rightarrow S = \frac{|-17-2|}{2} = \frac{19}{2} = 9.5$$

توجه: شیب سطح شیب دار با شیب خط، متفاوت است.

سوال ۶: کدام یک از چهار خط زیر، دارای شیب کمتری هستند؟



(۱) d_1 (۲) d_2 (۳) d_3 (۴) d_4

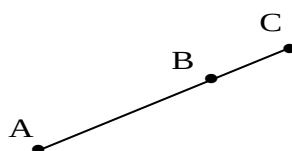
توجه: نام دیگر شیب، ضریب زاویه است.

نکته: شیب خطی که از نقاط $A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$ می گذرد برابر است با: $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$

نکته: شرط قرار گرفتن ۳ نقطه روی یک خط راست (استقامت):

شیب $AB =$ شیب BC یا شیب $AB =$ شیب AC

نکته: فاصله ی نقطه از نقطه:



$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

نکته: فاصله‌ی نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ از خط $ax + by + c = 0$:

$$d = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال: مساحت مربعی که یک رأس آن نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ و یک ضلع آن روی خط $4x - 3y = -2$ قرار دارد،

چند واحد است؟

جواب:

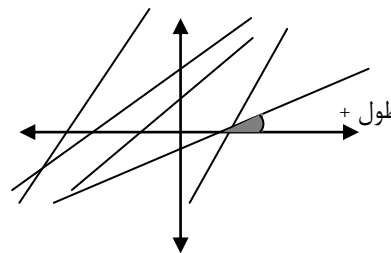
$$4x - 3y + 2 = 0 \Rightarrow d = \frac{|4 \times 3 - 3 \times 2 + 2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow S = \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{64}{25}$$

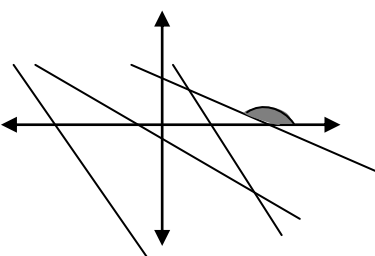
شیب خط:

نکته:

(الف) شیب این خطوط، مثبت است: طول + زاویه تند با جهت مثبت محور طول دارند.



(ب) شیب این خطوط، منفی است: زاویه باز با جهت مثبت محور طول دارند.



نکته: شیب خطی که طول از مبدأ آن، p و عرض از مبدأ آن q می‌باشد برابر است با: $-\frac{q}{p}$.

نکته: شرط موازی بودن دو خط: برابر بودن شیب‌های آن‌ها است.

نکته: شرط عمود بودن دو خط: حاصلضرب شیب‌هایشان، -1 باشد یا شیب یکی از خط‌ها، قرینه و معکوس دیگری باشد.

نکته: نقطه‌ی برخورد دو خط، با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول به دست می‌آید.

سوال ۷: قرینه خط (a) به معادله‌ی $3x - 2y = 1$ را نسبت به خط $x - y = 4$ رسم کردیم و نام آن را (a') گذاشتیم.

مختصات نقطه‌ی برخورد خط (a) و (a') کدام است؟

(۴) $\begin{bmatrix} -6 \\ -10 \end{bmatrix}$

(۳) $\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$

(۲) $\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$

(۱) $\begin{bmatrix} -7 \\ -11 \end{bmatrix}$

سوال ۸: m یک عدد صحیح مثبت است. خط‌های $13x + 11y = 700$ و $y = mx - 1$ یک‌دیگر را در نقطه‌ای با مختصات صحیح قطع کرده‌اند. در این صورت m برابر است با:

- (۱) فقط ۴ (۲) ۴ یا ۵ یا ۶ (۳) فقط ۳ (۴) فقط ۵

نکته: شرایط وجود جواب برای دستگاه دو معادله و دو مجهول:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

دو خط متقاطع‌اند. پس دستگاه یک جواب منحصر به فرد دارد $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

دو خط موازی‌اند پس نقطه‌ای برخورد ندارند. یعنی دستگاه جواب ندارد. $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

دو خط برهم منطبق‌اند پس بی‌شمار جواب وجود دارد. $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

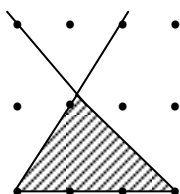
سوال ۹: m چند باشد تا دستگاه $\begin{cases} x + my + z = -1 \\ 2x + z = 1 \\ mx + y - z = 1 \end{cases}$ جواب داشته باشد ولی منحصر به فرد نباشد؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) برای m مقداری وجود ندارد.

نکته: مقدار مساحت محصور بین خطوط به معادله $y = ax + nb$ ، $y = mx + np$ و $y = cx + nd$ ، n^2 برابر مساحت محصور بین خطوط به معادله $y = ax + b$ ، $y = mx + p$ و $y = cx + d$ است.

به‌طور مثال مقدار مساحت محصور بین خطوط $y = 3x + 20$ و $y = 2x - 15$ و $y = -x + 35$ ، $5^2 = 25$ برابر مساحت محصور بین خطوط به معادله‌های $y = 3x + 4$ و $y = 2x - 3$ و $y = -x + 7$ است.

سوال ۱۰: مساحت قسمت رنگی در شکل مقابل چند واحد است؟



- (۱) ۲
(۲) $1/8$
(۳) $1/6$
(۴) $1/5$

سوال ۱۱: مساحت سطح محصور در نمودار $x^2y + xy^2 - xy = 0$ چه قدر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{4}$

سوال ۱۲: دو عدد حقیقی بین ۰ و ۲ انتخاب کردیم. احتمال آن که مجموع دو عدد انتخاب شده، بین ۱ و ۲ باشد، چه قدر است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{5}{8}$

سوال ۱۳: علی می‌خواست با یک سرعت ثابت، از شهر A به شهر B برود. او حساب کرد که اگر سرعتش، 5 km/h بیشتر شود، ۵ ساعت زودتر می‌رسد و اگر سرعتش 10 km/h بیش‌تر شود، ۸ ساعت زودتر

می‌رسد. سرعت ثابت او در ابتدا چند کیلومتر بر ساعت بوده است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۵ (۳) ۲۰ (۴) ۲۵

پاسخ تشریحی سؤالات قسمت سوم (معادله‌ی خط)

۱- از ۳ خط تشکیل شده است:

$$3x^2y + 2xy^2 - 6xy = 0 \Rightarrow xy(3x + 2y - 6) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 3x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

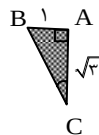
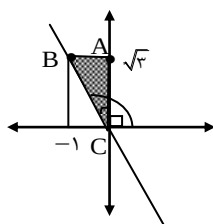
۲- گزینه (۱)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{محور طول}]{\text{قربنه نسبت به}} \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

کافی است در معادله‌ی خط، به جای y ، $-y$ قرار دهیم:

$$3x - 2y = 1 \Rightarrow 3x - 2(-y) = 1 \Rightarrow 3x + 2y = 1$$

۳- گزینه (۳) با رسم خط داریم:



$$\Rightarrow BC = 2 \Rightarrow \hat{C} = 30^\circ \Rightarrow 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

۴- گزینه (۴) به جای a دو مقدار قرار داده و دو معادله خط به دست آمده را درون دستگاه قرار داده و مختصات برخورد را به دست آوریم یا ابتدا عددی به جای a قرار دهیم که مضرب x صفر شود و پس از به دست آوردن y ، به جای a عددی قرار دهیم که مضرب y صفر شود و بتوانیم x را به دست آوریم.

$$\left. \begin{aligned} a = -\frac{1}{3} &\Rightarrow 0x + \left(-\frac{3}{2} + 1\right)y - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow y = -1 \\ a = -\frac{1}{3} &\Rightarrow \left(-\frac{2}{3} + 1\right)x + 0y - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow x = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

۵- گزینه (۲)

$$\Delta y = 37 - 3x \Rightarrow y = \frac{37 - 3x}{\Delta}$$

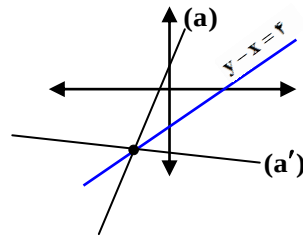
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 \Rightarrow y = 5 \\ x = 9 \Rightarrow y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۶- گزینه (۲)

۷- گزینه (۱) خط (a) و خط (a') و خط تقارن (یعنی $x - y = 4$) یک‌دیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند. پس کافی است نقطه برخورد خط (a) (یعنی $3x - 2y = 1$) و خط تقارن (یعنی $x - y = 4$) را به دست آوریم. داریم:

$$-2 \times \begin{cases} x - y = 4 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y = -8 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$x = -7 \Rightarrow y = -11$$



۸- گزینه (۳) با حل دستگاه، x را بر حسب m به دست می آوریم:

$$11 \times \begin{cases} 13x + 11y = 700 \\ mx - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13x + 11y = 700 \\ 11mx - 11y = 11 \end{cases}$$

$$(11m + 13)x = 711 \Rightarrow x = \frac{711}{11m + 13}$$

تجزیه ۷۱۱ می شود $3^2 \times 79$. پس $11m + 13$ باید شمارنده ی ۷۱۱ باشد و شمارنده های ۷۱۱، اعداد $\{1, 3, 9, 79, 237, 711\}$ هستند. داریم:

$$\left. \begin{array}{l} 11m + 13 = 1 \Rightarrow m = -\frac{12}{11} \text{ غ ق} \\ 11m + 13 = 3 \Rightarrow m = -\frac{10}{11} \text{ غ ق} \\ 11m + 13 = 9 \Rightarrow m = -\frac{4}{11} \text{ غ ق} \\ 11m + 13 = 79 \Rightarrow \boxed{m = 6} \\ 11m + 13 = 237 \Rightarrow m = \frac{224}{11} \text{ غ ق} \\ 11m + 13 = 711 \Rightarrow m = \frac{698}{11} \text{ غ ق} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{فقط } m = 6 \text{ قابل قبول است.}$$

۹- گزینه (۲) z را بر حسب x به دست می آوریم و در دستگاه، جایگزین می کنیم:

$$2x + z = 1 \Rightarrow z = 1 - 2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + my + (1 - 2x) = -1 \\ mx + y - (1 - 2x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + my = -2 \\ (m + 2)x + y = 2 \end{cases}$$

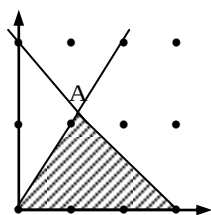
شرط انطباق دو خط را در نظر می گیریم. داریم:

$$\frac{-1}{m+2} = \frac{m}{1} = \frac{-2}{2} \Rightarrow \boxed{m = -1}$$

۱۰- گزینه (۲)

(۱) خط: $y = x$

(۲) خط: $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow 2x + 3y = 6$



$$\begin{cases} y = x \\ 2x + 3y = 6 \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگزینی}} 2x + 3x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{5} \Rightarrow y = \frac{6}{5} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

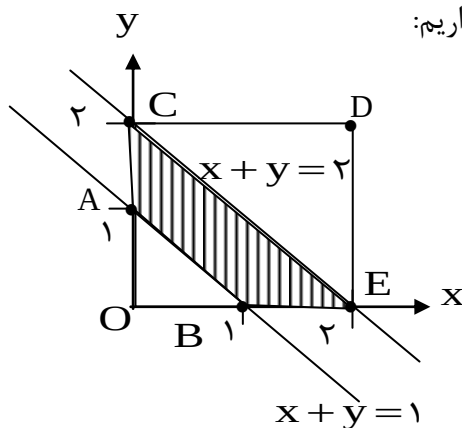
$$S = \frac{\frac{6}{5} \times 3}{2} = \frac{18}{10} = 1.8$$

۱۱- گزینه (۳)

$$x^2y + xy^2 - xy = 0 \Rightarrow xy(x + y - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$S = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$$

۱۲- گزینه (۲) دو عدد حقیقی را x و y در نظر می‌گیریم. طبق فرض مسئله $0 < x < 2$ و $0 < y < 2$ است. از طرفی $1 < x + y < 2$ می‌باشد. با توجه به نمودار رسم شده‌ی مقابل داریم:



$$S_{ABEC} = S_{OCE} - S_{OAB} = \frac{2 \times 2}{2} - \frac{1 \times 1}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{S_{ABEC}}{S_{OCDE}} = \frac{\frac{3}{2}}{2 \times 2} = \frac{3}{8} \text{ احتمال}$$

۱۳- گزینه (۲) اگر علی با سرعت اولیه‌ی V_1 در مدت زمان t به شهر B می‌رسید، با توجه به مفروضات مسئله می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} (V_1 + 5)(t - 5) = V_1 t \\ (V_1 + 10)(t - 1) = V_1 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5t - 5V_1 = 5 \\ 10t - 10V_1 = 10 \end{cases} \Rightarrow V_1 = 15$$

توجه: دانش‌آموز عزیز، از کتاب مرشد نهم فصل ۶، سوال‌های ۳۲۰، ۳۲۱ و ۳۲۲ را تمرین کنید.

قسمت چهارم: عبارت‌های جبری

درجه: 

نکته: ابتدا عبارت داده شده را ساده کنید و سپس به سؤالات درجه پاسخ دهید.

سؤال ۱: درجه‌ی عبارت $x^6 - 2x^3y^6 + 3x^2y^5 - y^6 + x^4y^5$

- بر حسب x, y : ۹

- بر حسب xy : ۴ می‌شود زیرا:

$$(xy)^6 x^6 - 2(xy)^3 y^3 + 3(xy)^2 y^3 - y^6 \times (xy)^6 + \underline{(xy)^4 y^5}$$

- بر حسب xy^2 : ۳ می‌شود زیرا:

$$(xy^2)^6 \times x^6 - \underline{2(xy^2)^3} + 3(xy^2)^2 y - (xy^2)^6 y^6 + (xy^2)^2 x^2 y$$

سؤال ۲: عبارت $(x+y+z+v+w)(z+v+w+p+q)$ پس از ساده شدن، چند جمله دارد؟

۲۵ (۴)

۲۲ (۳)

۲۰ (۲)

۱۸ (۱)

نکته: $x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$ اگر

$x < 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -2$ اگر

سؤال ۳: اگر $x < 0$ باشد، کم‌ترین مقدار عبارت $\frac{2x^4 - 3x^2 + 2}{x^2}$ چه قدر است؟

۱ (۴)

-۱ (۳)

-۲ (۲)

۰ (۱)

نکته: اگر مجموع چند عبارت نامنفی، صفر شود، هر یک از آن‌ها صفر هستند.

سؤال ۴: مقدار $x+y$ در سؤال مقابل چه قدر است؟

$$2x^2 + y^2 - 8x - 2y + 2xy + 10 = 0$$

۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

۰ (۱)

سؤال ۵: اگر $3ab = -a^2b - 7b$ و $-3a^2b + ab - 9b = 0$ باشد، مقدار a چه قدر است؟

۱ (۴)

-۱ (۳)

۲ (۲)

۰ (۱)

نکته: در سؤالات شرطی، می‌توانید به جای متغیرها، اعداد دلخواه قرار دهید تا در شرط صدق کنند. سپس آن اعداد را درون عبارت قرار داده و حاصل را به دست آورید.

سؤال ۶: اگر $x + y = 2$ باشد، حاصل عبارت زیر چه قدر است؟

$$x^6 + y^6 - x^3y^3 - x^2y^2 + 16xy$$

- (۱) -۸ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) -۱۶

سؤال ۷: اگر $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z = -14$ باشد، حاصل $x + y - z$ چه قدر است؟

- (۱) ۰ (۲) ۶ (۳) -۱۰ (۴) ۱۶

سؤال ۸: اگر $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$ باشد، حاصل عبارت $\frac{(x-y)(x+y+z)^2}{x^5 + y^5 + z^5}$ چه قدر است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲

نکته: در عبارت‌های درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c$ ، کمترین ($a > 0$) یا بیش‌ترین ($a < 0$) مقدار به‌ازای

$$x = -\frac{b}{2a}$$
 به‌دست می‌آید.

سؤال ۹: کم‌ترین مقدار عبارت $\frac{3}{4}x^2 - 7x + 1$ چه قدر است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۳

سؤال ۱۰: کوچک‌ترین عدد طبیعی n به‌طوری که عبارت $4^n + 4^{623} + 4^{1000}$ مربع کامل باشد، چه قدر است؟

- (۱) ۱۲۴۶ (۲) ۳۴۵ (۳) ۲۴۵ (۴) ۲۱۵

سؤال ۱۱: معادله‌ی $9^x - 6^x - 4^x + 3^x = 1$ چند جواب در مجموعه‌ی اعداد حقیقی دارد؟

- (۱) جواب ندارد. (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

سؤال ۱۲: عدد $2^{16} - 1$ چند شمارنده‌ی صحیح دارد؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) ۳۲ (۴) ۶۴

سؤال ۱۳: حاصل عبارت $\sqrt{10 + 3\sqrt{10 + 3\sqrt{10 + 3\sqrt{\dots}}}}$ چه قدر است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۱۰ (۴) ۱۳

سؤال ۱۴: عبارت $33x^2 + ax + 33$ را به حاصل ضرب دو، دو جمله‌ای درجه اول با ضرایب صحیح تجزیه

می‌کنیم. در این صورت در مورد a کدام عبارت درست است؟

- (۱) فرد است. (۲) زوج است. (۳) صفر است. (۴) نمی‌توان مشخص کرد.

سؤال ۱۵: عدد طبیعی $x - 2$ ، یکی از شمارنده‌های عبارت $3x^2 - 2x + 10$ است. در این صورت حاصل جمع

کل مقادیری که می‌توان به‌جای x قرار داد، چه قدر است؟

- (۱) ۳۹ (۲) ۴۳ (۳) ۴۹ (۴) ۵۱

سؤال ۱۶: اگر $a^2 - a - 10 = 0$ باشد، کدام عبارت زیر در مورد حاصل عبارت $(a+1)(a+2)(a-4)$ درست است؟

- (۱) عددی صحیح است. (۲) مثبت و گنگ است.
(۳) منفی و گنگ است. (۴) گویای غیر صحیح است.
- نکته:** برای به دست آوردن مجموع ضرایب در عبارت‌های جبری، کافی است به جای متغیرها، عدد ۱ قرار داد.

سؤال ۱۷: مجموع ضرایب در حاصل عبارت زیر، چقدر است؟

$$(1398x^7 - 1399y^5)(3x^6 - 1)(7x^2 + 4xy^5 - 2y)$$

(۱) -۱۸ (۲) +۱۸ (۳) -۶۳ (۴) ۰

نامعادله

سؤال ۱۸: نامعادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{(x^2 + 1)(3x + 6)}{x^2 - 3x} > 0$$

نکته: $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$

$$|x| \geq b \Rightarrow \begin{cases} x \geq b \\ \text{یا} \\ x \leq -b \end{cases}$$

نکته:

سؤال ۱۹: مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $(1 - |x|)(1 + x) > 0$ را روی محور اعداد نمایش دهید.

سؤال ۲۰: مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $\sqrt{x-1} \leq |x-1|$ کدام است؟

(۱) $\{1, 2\}$ (۲) $\{x \mid 1 < x < 2\}$ (۳) $\{x \mid x \geq 2\} \cup \{1\}$ (۴) $\{x \mid x \geq 3\}$

نکته: برای اعداد حقیقی و مثبت a, b و c ، همواره داریم:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$$

اثبات:

$$(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \geq 0$$

نکته: مجموع مربعات دو عدد حقیقی، همواره بزرگتر از ۲ برابر حاصل ضرب آن‌ها است زیرا:

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

نکته: برای هر دو عدد حقیقی مثبت a و b ، میانگین ۲ عدد، بزرگتر یا مساوی جذر حاصل ضرب آن دو عدد است زیرا:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Rightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

نکته: مربع مجموع دو عدد حقیقی، همواره بزرگتر یا مساوی ۴ برابر حاصل ضرب آنها است:

$$(x + y)^2 \geq 4xy$$

سؤال ۲۱: چند عدد دو رقمی وجود دارد که اگر جای رقم‌های آن را عوض کنیم، عدد حاصل حداقل ۳ برابر عدد اولیه می‌شود؟

۵ (۴)

۶ (۳)

۸ (۲)

۱۰ (۱)

پاسخنامه تشریحی سوالات قسمت چهارم (عبارت‌های جبری)

۱- در متن درس نوشته شده است.

$$5 \times 5 = 25$$

$$ZV, ZW, VW$$

$$25 - 3 = 22$$

۲- گزینه (۳) تعداد کل جملات قبل از ساده کردن:

جملات متشابه:

تعداد جملات پس از ساده شدن

۳- گزینه (۴)

$$\frac{2x^4}{x^2} - \frac{3x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2} = 2x^2 - 3 + \frac{2}{x^2}$$

$$= 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3 \Rightarrow 2 \times 2 - 3 = 1 \text{ کمترین مقدار}$$

۴- گزینه (۳)

$$2x^2 + y^2 - 4x - 2y + 2xy + 10 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 + y^2 - 4x - 2y + 2xy + 9 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 4x + 4) + (x^2 + y^2 + 1 + 2xy - 2x - 2y) = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (x+y-1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x+y-1=0 \Rightarrow 2+y-1=0 \Rightarrow y=-1 \end{cases} \Rightarrow x+y=2-1=1$$

۵- گزینه (۴)

$$\begin{cases} -3a^2b + ab - 9b = 0 \\ +a^2b + 3ab + 7b = 0 \end{cases} \xrightarrow{+} -2a^2b + 4ab - 2b = 0$$

$$\Rightarrow -2b(a^2 - 2a + 1) = 0 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a-1)^2 = 0 \Rightarrow a=1$$

۶- گزینه (۳) کافی است به جای مثلاً x ، مقدار صفر و به جای y ، عدد ۲ قرار دهیم. داریم:

$$0 + 2^4 - 0 - 0 + 0 = 16$$

۷- گزینه (۲) عدد ۱۴ را به صورت $4+1+9$ می‌نویسیم. داریم:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z + 14 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 + z^2 + 6z + 9 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=-3 \end{cases}$$

در نتیجه $x+y-z=2+1+3=6$ است.

۸- گزینه (۱) دو طرف شرط را ۲ برابر می کنیم. داریم:

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2xy + 2yz + 2zx$$

$$x^2 + x^2 + y^2 + y^2 + z^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 0$$

$$(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x-z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=z$$

۹- گزینه (۲)

$$x = \frac{-(-7)}{2 \times 1 - \frac{3}{4}} = \frac{7}{\frac{5}{4}} = 2 \Rightarrow 3 \times (2)^2 - 7 \times (2) + 1 = -1$$

۱۰- گزینه (۳)

$$2^{2n} + 2^{1246} + 2^{2000} \Rightarrow \begin{cases} (2^n + 2^{1000})^2 \Rightarrow 2 \times 2^n \times 2^{1000} = 2^{1246} \Rightarrow n = 245 \\ (2^n + 2^{623})^2 \Rightarrow 2 \times 2^n \times 2^{623} = 2^{2000} \Rightarrow n = 1376 \end{cases}$$

پس $n = 245$ جواب مسأله است.

۱۱- گزینه (۲) اگر $2^x = a$ و $3^x = b$ باشد، داریم:

$$2^x + 3^x - 4^x + 6^x - 9^x = 1$$

$$\Rightarrow a + b - a^2 + ab - b^2 = 1$$

دو طرف را ۲ برابر می کنیم. داریم:

$$2a + 2b - 2a^2 + 2ab - 2b^2 = 2$$

$$\Rightarrow (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a-b=0 \Rightarrow a=b \\ a-1=0 \Rightarrow a=1 \Rightarrow a=b=1 \\ b-1=0 \Rightarrow b=1 \end{cases}$$

پس $2^x = 1$ در نتیجه $x = 0$ است.

۱۲- گزینه (۳) با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$2^{16} - 1 = (2^8 - 1)(2^8 + 1) = (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^2 + 1) = 15 \times 17 \times 257 = 3^1 \times 5^1 \times 17^1 \times 257^1$$

$$\Rightarrow 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 \Rightarrow 16 \times 2 = 32$$

۱۳- گزینه (۲)

$$A = \sqrt{10 + 3\sqrt{10 + 3\sqrt{10 + 3\sqrt{\dots}}}}$$

$$A^2 = 10 + 3A \Rightarrow A^2 - 3A - 10 = 0 \Rightarrow (A-5)(A+2) = 0 \Rightarrow A = 5$$

۱۴- گزینه‌ی (۲)

$$(33x^2 + ax + 33) = (Mx + N)(Fx + E) = MFx^2 + (M \cdot E + N \cdot F)x + N \cdot E$$

$$\Rightarrow M \cdot F = 33, \quad M \cdot E + N \cdot F = a, \quad N \cdot E = 33$$

۳۳ عددی فرد است، پس M, F, E و N نیز فرد هستند پس $M \cdot E + N \cdot F$ یعنی a حتماً زوج است.

۱۵- گزینه‌ی (۴)

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 2x + 10 \quad | \quad x - 2 \\ \underline{3x + 4} \\ -3x^2 - 6x \\ \underline{4x + 10} \\ -4x - 8 \\ \underline{18} \end{array} \Rightarrow 3x^2 - 2x + 10 = (x - 2)(3x + 4) + 18$$

با توجه به رابطه‌ی اخیر، عدد ۱۸ باید بر $x - 2$ بخش پذیر باشد. با توجه به این که $x - 2$ باید طبیعی باشد، پس $x - 2$ یکی از اعداد ۱، ۲، ۳، ۶، ۹ و ۱۸ است که برای x مقدارهای ۳، ۴، ۵، ۸، ۱۱ و ۲۰ به دست می‌آید که مجموع آن‌ها ۵۱ است.

۱۶- گزینه‌ی (۱)

$$a^2 - a - 10 = 0 \Rightarrow a^2 = a + 10$$

$$(a + 1)(a + 2)(a - 4) = (a^2 + 3a + 2)(a - 4) = (a + 10 + 3a + 2)(a - 4)$$

$$= 4(a + 3)(a - 4) = 4(a^2 - a - 12) = 4(-2) = -8 \in \mathbb{Z}$$

۱۷- گزینه‌ی (۱)

$$(1398 - 1399)(3 - 1)(7 + 4 - 2) = -18$$

-۱۸

$$\frac{(x^2 + 1) \times (3x + 6)}{x(x - 3)} > 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & -2 & 0 & 3 & +\infty \\ \hline x^2 + 1 & + & + & + & + & + \\ 3x + 6 & - & 0 & + & + & + \\ x & - & - & 0 & + & + \\ x - 3 & - & - & - & 0 & + \\ \hline \frac{(x^2 + 1)(3x + 6)}{x(x - 3)} & - & 0 & + & 0 & + \end{array}$$

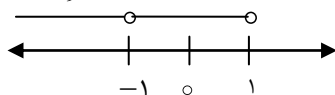
-۱۹

$$\begin{cases} 1 - |x| > 0 \Rightarrow 1 > |x| \Rightarrow -1 < x < 1 \\ 1 + x > 0 \Rightarrow x > -1 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 1 \quad \text{رابطه (۱)}$$

یا

$$\left\{ \begin{array}{l} 1-|x| < 0 \Rightarrow |x| > 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 1 \\ \text{یا} \\ x < -1 \end{array} \right\} \\ \text{و} \\ 1+x < 0 \Rightarrow x < -1 \end{array} \right\} \Rightarrow x < -1 \quad \text{رابطه (۲)}$$

$\Rightarrow$ رابطه (۲) $\cup$ رابطه (۱)



۲۰- گزینه (۳) عدد ۱ و ۲ در نامعادله صدق می کنند پس گزینه های (۲) و (۴) حذف می شوند. عدد ۳ در نامعادله صدق می کند، پس گزینه (۳) جواب است.

۲۱- گزینه (۳) آن عدد را $\overline{xy}$ در نظر می گیریم. داریم:

$$\overline{yx} \geq 3\overline{xy} \Rightarrow 10y + x \geq 30x + 3y \Rightarrow 7y \geq 29x$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} \geq \frac{29}{7} \Rightarrow \frac{y}{x} \geq 4\frac{1}{7} \Rightarrow \frac{y}{x} \in \left\{ \frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \frac{7}{1}, \frac{8}{1}, \frac{9}{1}, \frac{9}{2} \right\}$$

پس اعداد دو رقمی ممکن عبارتند از ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۹ که تعداد آنها ۶ تا است.

قسمت پنجم: عبارات گویای جبری

دامنهی تعریف عبارات گویای جبری:

نکته مهم: دامنه‌ی هر عبارت گویای جبری، قبل از ساده کردن آن به دست می‌آید

$$\frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+1)}$$

سؤال ۱: دامنه‌ی تعریف عبارت $\frac{\sqrt{x-1}}{x+|x|}$ کدام است؟

(۴) $x > 1$

(۳) $x \geq 1$

(۲) $x > 0$

(۱) $0 < x \leq 1$

سؤال ۲: دامنه‌ی تعریف $\sqrt{\frac{x^2-x}{x+3}}$ کدام است؟

(۲) $\{x | x \geq 1\}$

(۱) $\{x | x < -3\}$

(۴) $\{x | -3 < x \leq 0\} \cup \{x | x \geq 1\}$

(۳) $\{x | x < -3\} \cup \{x | 0 \leq x \leq 1\}$

نکته: در معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$:

اگر $a + b + c = 0$ باشد، همواره یکی از جواب‌ها ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ است.

اگر $a + c = b$ باشد، همواره یکی از جواب‌ها ۱ و دیگری $-\frac{c}{a}$ است.

سؤال ۳: دامنه‌ی عبارت گویای $\frac{x^2+1}{5x^2-3x-2}$ کدام است؟

(۴) $\mathbb{R} - \left\{1, -\frac{2}{5}\right\}$

(۳) $\mathbb{R} - \left\{-1, \frac{2}{5}\right\}$

(۲) $\mathbb{R} - \{1\}$

(۱) $\mathbb{R} - \{-1\}$

سؤال ۴: اگر $\frac{x^2+2x+3}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1}$ باشد، مقدار $A+B+C$ چه قدر است؟

(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) ۰

تقسیم بر چندجمله‌ای

نکته: در تقسیم چند جمله‌ای بر چندجمله‌ای، تقسیم را تا جایی ادامه می‌دهیم که درجه‌ی باقی‌مانده از درجه‌ی مقسوم‌علیه کم‌تر شود.

به‌طور مثال اگر مقسوم‌علیه از درجه‌ی ۳ باشد، باقی‌مانده حداکثر از درجه‌ی ۲ است.

نکته: برای به دست آوردن باقی‌مانده یک تقسیم، می‌توان ابتدا ریشه یا ریشه‌های مقسوم‌علیه را به دست آورده و در مقسوم جای‌گذاری کنیم.

مثال:

$$x^5 - 7x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 1 \mid x^2 + 1$$

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$$

اکنون مقسوم را بر حسب x^2 می نویسیم:

$$x^5 - 7x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 1 \Rightarrow (x^2)^2 \times x - 7(x^2)^2 + 2(x^2)x - 5x^2 + 1$$

در این مرحله، هر جا x^2 داریم، ۱- قرار می دهیم:

$$(-1)^2 \times x - 7(-1)^2 + 2(-1)x - 5(-1) + 1$$

$$= x - 7 - 2x + 5 + 1 = -x - 1 \quad \text{باقی مانده}$$

نکته: $x^n - y^n$ همواره بر $x - y$ بخش پذیر است. $n \in \mathbb{N}$

اثبات: باقی مانده $x^n - x^n = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow x - y = 0$

نکته: اگر n زوج باشد، $x^n - y^n$ همواره بر $x + y$ بخش پذیر است زیرا:

$$x + y = 0 \Rightarrow y = -x \Rightarrow x^n - (-x)^n = 0 \quad \text{اگر } n \text{ زوج باشد}$$

نکته: اگر n فرد باشد، $x^n + y^n$ همواره بر $x + y$ بخش پذیر است، زیرا:

$$x + y = 0 \Rightarrow y = -x \Rightarrow x^n + (-x)^n = 0 \quad \text{اگر } n \text{ فرد باشد}$$

سؤال ۵: عدد $7^7 + 23^7$ بر کدام عدد زیر بخش پذیر نیست؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

سؤال ۶: اگر باقی مانده ی تقسیم چندجمله ای A بر $x-1$ ، برابر با ۲ و باقی مانده ی تقسیم آن بر $2x-4$ برابر

۳ باشد، باقی مانده ی تقسیم A بر $(x-1)(2x-4)$ کدام است؟

- (۱) x (۲) $x+1$ (۳) $2x+1$ (۴) $x+2$

نکته: اگر باقی مانده ی A بر C ، برابر R_1 و باقی مانده ی B بر C ، برابر R_2 باشد آنگاه باقی مانده ی

تقسیم:

$$(1) \quad A \pm B \text{ بر } C \text{ برابر است با } R_1 \pm R_2.$$

$$(2) \quad A \times B \text{ بر } C \text{ برابر است با } R_1 \times R_2$$

توجه: اگر درجه ی $R_1 \times R_2$ ، از درجه ی C بیش تر شود، باید $R_1 \times R_2$ را بر C تقسیم کرد.

سؤال ۷: اگر باقی مانده ی تقسیم چندجمله ای A بر $x(x-2)$ برابر $x+1$ و باقی مانده ی تقسیم چندجمله ای B

بر $2x-x^2$ ، برابر $4x-3$ باشد، باقی مانده ی تقسیم چندجمله ای $A \times B$ بر $2x-x^2$ کدام است؟

- (۱) $6x$ (۲) $x-3$ (۳) $9x$ (۴) $9x-3$

سؤال ۸: یک نفر شروع به پیاده روی به صورت رفت و برگشت کرد. جاده او به ترتیب مسطح و سپس سربالایی بود. کل رفت و برگشت او ۱۲۰ دقیقه طول کشید. اگر سرعت این فرد روی جاده مسطح 4 km/h و در سربالایی 3 km/h و در سرازیری 6 km/h باشد، او در این پیاده روی چند کیلومتر راه رفته است؟

- (۱) 6 km (۲) $7/5 \text{ km}$ (۳) 8 km (۴) 10 km

عبارت های رادیکالی

سؤال ۹: اگر عبارت $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{7}}$ را گویا کنیم، مخرج چه مقدار می شود؟

- (۱) ۳ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) ۱۰

سؤال ۱۰: ساده شده عبارت $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+3}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}-3$ (۲) $\sqrt{3}+1$ (۳) $\sqrt{3}-1$ (۴) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

رادیکال مرکب:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}, \quad C = \sqrt{A^2 - B}$$

مثال: رادیکال مرکب $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ را در نظر بگیرید. می توان نوشت:

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{5-\sqrt{24}} \Rightarrow \left. \begin{matrix} A=5 \\ B=24 \end{matrix} \right\} \Rightarrow C = \sqrt{A^2 - B} \Rightarrow C = \sqrt{25-24} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5+1}{2}} - \sqrt{\frac{5-1}{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

سؤال ۱۱: بیش ترین مقدار طبیعی n که رابطه ی زیر در آن برقرار می شود، کدام است؟

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq 15$$

- (۱) ۲۱۵ (۲) ۲۲۵ (۳) ۲۴۰ (۴) ۲۵۵

پاسخنامه تشریحی سوالات قسمت پنجم (عبارات گویای جبری)

۱- گزینه (۳)

رابطه‌ی (۱) $x-1 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \geq 1}$

رابطه (۲) $x+|x| \neq 0 \Rightarrow |x| \neq -x \Rightarrow \boxed{x > 0}$

$x \geq 1$: رابطه (۲) $\cap$ رابطه (۱)

۲- گزینه (۴) از جدول تعیین علامت استفاده می‌کنیم. ابتدا ریشه‌های صورت و مخرج را پیدا می‌کنیم.
داریم:

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0$$

$$x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

X	$-\infty$	-3	0	1	$+\infty$	
X-1	-	-	-	0	+	
X	-	-	0	+	+	
X+3	-	0	+	+	+	
$\frac{X^2-X}{X+3}$	-	0	+	-	0	+

جواب

جواب

$$\Rightarrow \{x | -3 < x \leq 0\} \cup \{x | x \geq 1\}$$

۳- گزینه (۳) با توجه به این که $5 + (-3) + (-2) = 0$ می‌شود، داریم:

$$5x^2 - 3x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1, \quad x \neq \frac{2}{5} \Rightarrow \mathbb{R} - \left\{-1, \frac{2}{5}\right\}$$

۴- گزینه (۴)

$$\begin{aligned} \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1} &= \frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+1)}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{Ax^2+Ax+Bx+B+Cx^2+C}{(x^2+1)(x+1)} \\ &= \frac{(A+C)x^2+(A+B)x+(B+C)}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{x^2+2x+3}{(x^2+1)(x+1)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} A+C=1 \\ A+B=2 \\ B+C=3 \end{array} \right\} \text{جمع} \Rightarrow 2A+2B+2C=6 \Rightarrow A+B+C=3$$

۵- گزینه (۴) $x^n + y^n$ به شرط فرد بودن n ، بر $x+y$ بخش پذیر است. پس $23^7 + 7^7 = 3^0$ بر $23+7=30$ و بر شمارنده‌های 30 بخش پذیر است پس بر 7 بخش پذیر نیست.

۶- گزینه (۲) باقی مانده تقسیم بر $(x-1)(2x-4)$ باید حداکثر از درجه ی ۱ باشد یعنی به صورت $ax+b$ داریم:

$$\text{رابطه ی (۱)} \quad x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow a \times 1 + b = 2 \Rightarrow \boxed{a+b=2}$$

$$\text{رابطه ی (۲)} \quad 2x-4=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow a \times 2 + b = 3 \Rightarrow \boxed{2a+b=3}$$

از (۱) و (۲) نتیجه می شود $a=1$ و $b=1$ یعنی باقی مانده برابر است با $x+1$.

۷- گزینه (۴) باقی مانده تقسیم $A \times B$ بر x^2-2x ، برابر است با $4x^2+x-3 = (x+1)(4x-3)$. چون درجه ی باقی مانده باید از درجه ی مقسوم علیه کم تر باشد، باید $4x^2+x-3$ را بر x^2-2x تقسیم کنیم که در این صورت باقی مانده $9x-3$ به دست می آید.

۸- گزینه (۳) می دانیم $\text{مسافت} = \text{سرعت} \times \text{زمان}$.

اگر x ، طول سطح مسطح و y طول سطح شیب دار باشد، می توان نوشت:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{y}{6} + \frac{x}{4} = 2 \Rightarrow x+y=4 \text{ km} \quad \text{طول مسیر رفت}$$

در نتیجه کل مسیر $4+4=8 \text{ km}$ است.

۹- گزینه (۴)

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{7}} \times \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{7}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{7}} &= \frac{\overbrace{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{7}}^A}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{7})^2} = \frac{A}{2+3+2\sqrt{6}-7} \\ &= \frac{A}{2\sqrt{6}-2} = \frac{A}{2(\sqrt{6}-1)} = \frac{A}{2(\sqrt{6}-1)} \times \frac{(\sqrt{6}+1)}{(\sqrt{6}+1)} = \frac{A(\sqrt{6}+1)}{10} \end{aligned}$$

۱۰- گزینه (۴)

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+3} &= \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{3}(\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \times (1+\sqrt{3})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \times \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1} = \sqrt{3}-\sqrt{2} \end{aligned}$$

۱۱- گزینه (۴) اگر صورت و مخرج هر کسر را در مزدوج مخرج ضرب کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1 \times (\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + \frac{1 \times (\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} + \dots + \frac{1 \times (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} &\leq 15 \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \dots + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n} &\leq 15 \\ \Rightarrow \sqrt{n+1}-1 \leq 15 \Rightarrow \sqrt{n+1} \leq 16 \Rightarrow n+1 \leq 256 \Rightarrow n \leq 255 \end{aligned}$$

قسمت ششم: حجم

نکته: هرگاه ضلع‌های جسمی را a برابر کنیم، مساحت جانبی و مساحت کل آن a^2 برابر و حجم آن a^3 برابر می‌شود.

مثال: به بُدهای جسمی ۲۰٪ افزودیم. در این صورت درصد افزوده شده به مساحت جانبی و مساحت کل آن، برابر است با:

$$100\% + 20\% = 120\% \Rightarrow \frac{120}{100} \times \frac{120}{100} = \frac{144}{100} \Rightarrow 144\% - 100\% = 44\%$$

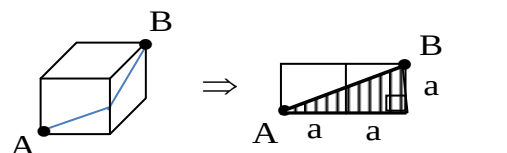
نکته: اگر طول یال‌های مکعبی را k برابر کنیم، طول قطر آن نیز k برابر می‌شود.

نکته: هر مکعب، دارای ۹ صفحه‌ی تقارن است.

نکته: هرگاه یک مکعب با تا کردن سیم بسازیم، تعداد یال‌های آن حداقل ۱۵ می‌شود. زیرا ۳ یال تکرار می‌شود.

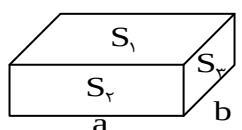
نکته: مساحت هر مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a از رابطه $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ به دست می‌آید.

نکته: برای رفتن از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B روی مکعب به ضلع a ، کوتاه‌ترین مسیر برابر است با



$$AB = a\sqrt{5}$$

نکته: در هر مکعب مستطیل، حاصلضرب مساحت ۳ وجه مشترک در یک رأس، با مجذور حجم آن برابر است:



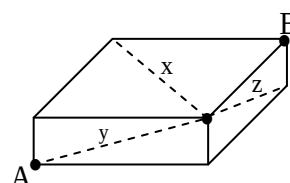
$$S_1 \times S_2 \times S_3 = (abc)^2 = (\text{حجم})^2$$

نکته: هر مکعب مستطیل، ۳ صفحه‌ی تقارن دارد. (مکعب مستطیل مکعب مربع نباشد)

نکته: اندازه‌ی قطر هر مکعب مستطیل با طول و عرض و ارتفاع a ، b و c برابر است با:

$$\text{قطر} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

نکته: اگر اندازه‌ی قطرهای ۳ وجه مشترک در یک رأس از یک مکعب مستطیل x ، y و z باشد، قطر مکعب مستطیل برابر است با

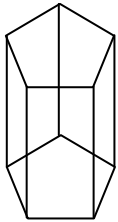


$$AB = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}}$$

نکته: در هرم‌ها و منشورها همواره داریم:

$$\text{تعداد یال‌ها} = ۲ - (\text{تعداد وجه‌ها} + \text{تعداد رأس‌ها})$$

مثال:



$$۱۵ = ۲ - (۷ + ۱۰)$$

نکته: در هر منشور، تعداد یال‌ها همواره بر ۳ بخش پذیر است.

نکته: در هر منشور، همواره تعداد رأس‌ها بر ۲ بخش پذیر است.

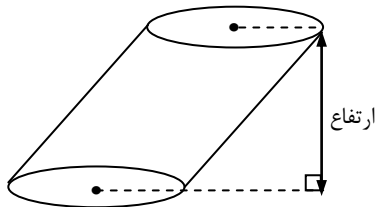
نتیجه: در هر منشور حاصلضرب تعداد یال‌ها در تعداد رأس‌ها، همواره بر ۶ بخش پذیر است.

نکته: در هر منشور، داریم:

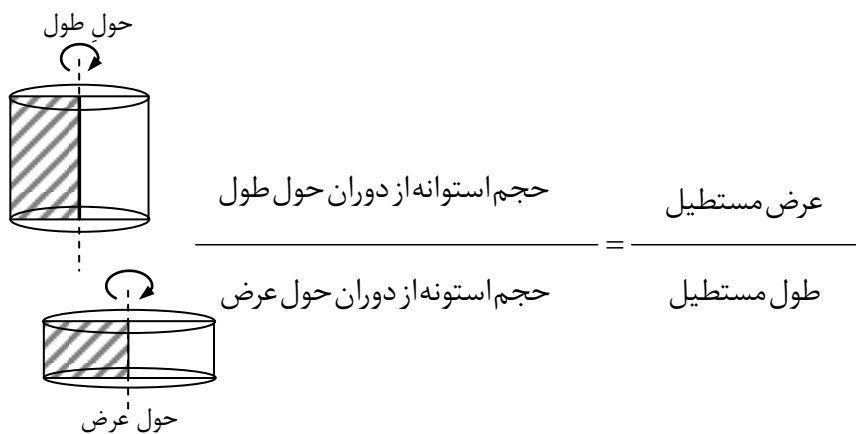
$$\text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده} = \text{مساحت جانبی}$$

$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \text{حجم}$$

توجه: در منشورهای مایل، ارتفاع، فاصله‌ی دو صفحه‌ی موازی است که قاعده‌های شکل روی آن قرار دارند:



نکته: اگر یک مستطیل را یک بار حول طول آن و بار دیگر حول عرضش دوران دهیم، استوانه به وجود می‌آید. داریم:



سؤال ۱: در شکل زیر، یک گیاه دقیقاً ۵ دور با شیب ثابت دور میله‌ای به ارتفاع ۱m و محیط ۱۵cm پیچیده

است. طول ساقه‌ی گیاه چقدر است؟



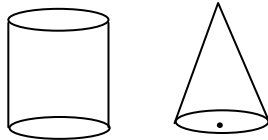
(۱) ۰/۷۵ متر

(۲) ۱ متر

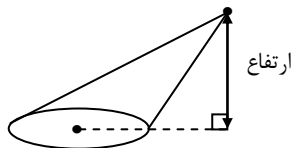
(۳) ۱/۲۵ متر

(۴) ۱/۵ متر

مخروط

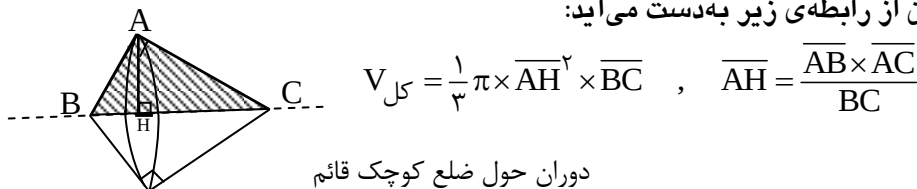


نکته: هرگاه قاعده‌ی یک مخروط با قاعده‌ی یک استوانه و هم‌چنین ارتفاع مخروط با ارتفاع استوانه برابر باشد، در این صورت حجم مخروط، $\frac{1}{3}$ حجم استوانه است. پس $V = \frac{1}{3} S \cdot h$



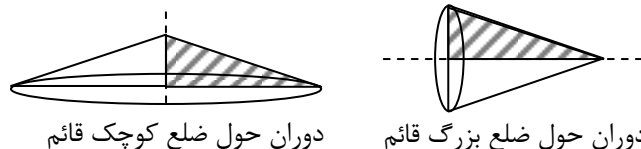
نکته: در مخروط مایل، ارتفاع، فاصله‌ی راس مخروط از صفحه‌ی قاعده است.

نکته: از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول وترش، دو مخروط به‌دست می‌آید که از قاعده به یکدیگر چسبیده‌اند که حجم کل آن از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:



دوران حول ضلع کوچک قائم

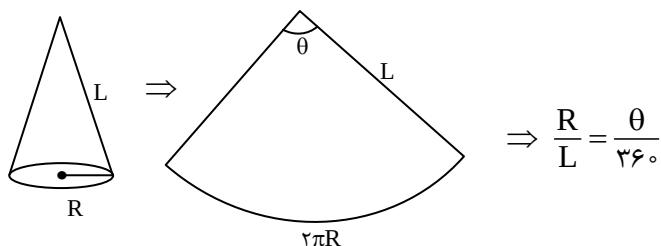
نکته: نسبت حجم مخروط‌های به‌دست آمده از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول اضلاع قائم آن برابر است با:



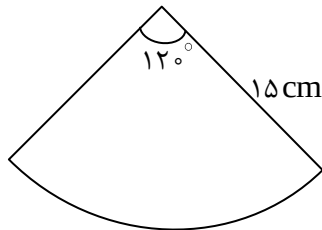
$$\frac{\text{حجم مخروط از دوران حول ضلع قائم کوچک}}{\text{حجم مخروط از دوران حول ضلع قائم بزرگ}} = \frac{\text{ضلع بزرگ قائم}}{\text{ضلع کوچک قائم}}$$

نکته: حجم حاصل از دوران مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a حول یک ضلع آن برابر است با: $V = \frac{\pi}{4} a^3$

نکته: از گسترده کردن یک مخروط قائم به شعاع R و طول مولد L ، قطاع یک دایره به شعاع L حاصل می‌شود. اگر θ زاویه‌ی این قطاع باشد، داریم:



سؤال ۲: حجم مخروطی که اگر سطح جانبی آن را باز کنیم، قطاعی 120° به شعاع ۱۵ سانتی متر به دست می آید، چند سانتی متر مکعب است؟



$$\frac{250\sqrt{3}}{2}\pi \quad (1)$$

$$\frac{150\sqrt{3}}{2}\pi \quad (2)$$

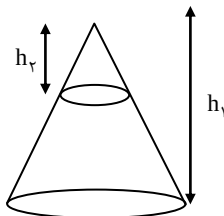
$$\frac{150\sqrt{2}}{3}\pi \quad (3)$$

$$\frac{250\sqrt{2}}{3}\pi \quad (4)$$

نکته: مساحت جانبی و مساحت کل هر مخروط به شعاع قاعده R و مولد L برابر است با:

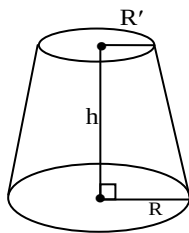
$$\text{مساحت کل مخروط} = \pi RL + \pi R^2 = \pi R(L + R) \quad \text{مساحت جانبی مخروط} = \pi RL$$

نکته: هرگاه به موازات قاعده مخروطی، یک برش بزنیم، نسبت حجم مخروط کوچک به حجم مخروط اولیه برابر با مکعب نسبت ارتفاع آنها است:



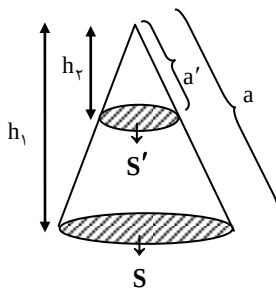
$$\frac{V_{\text{کوچک}}}{V_{\text{کل}}} = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^3$$

نکته: حجم مخروط ناقص از رابطه ی زیر به دست می آید:



$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R'^2 + RR')$$

نکته: هرگاه به موازات قاعده مخروطی، بر آن برش بزنیم، رابطه های زیر برقرار می شود:



$$\frac{a'}{a} = \frac{R'}{R} = \frac{h_2}{h_1}$$

$$\frac{S'}{S} = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \left(\frac{R'}{R}\right)^2 = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2$$

سؤال ۳: مخروطی به ارتفاع ۳ را با دو صفحه که موازی قاعده اش است، به سه شکل هم حجم بریده ایم. مخروط در چه ارتفاع هایی بریده شده است؟

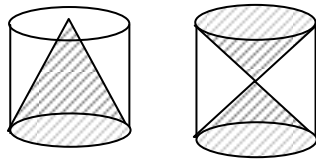
$$3 - \sqrt[3]{9}, 3 - \sqrt[3]{18} \quad (2)$$

$$1, 2 \quad (1)$$

$$\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}, \frac{\sqrt[3]{3}}{3} \quad (4)$$

$$\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{3} \quad (3)$$

سؤال ۴: دو استوانه‌ی شکل زیر هم‌اندازه‌اند حجم مخروط محاط در استوانه‌ی سمت چپ را با V و حجم دو مخروط سمت راست را با W نمایش می‌دهیم. چه رابطه‌ای بین V و W برقرار است؟

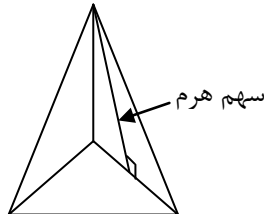


$$V > W \quad (۱)$$

$$V < W \quad (۲)$$

$$V = W \quad (۳)$$

(۴) هر یک از ۳ حالت فوق می‌تواند برقرار باشد.



سهم هرم: ارتفاع هر وجه جانبی از هرم را سهم می‌گویند.

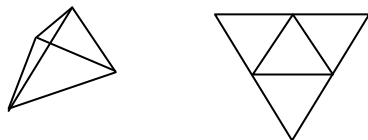
هرم منتظم: هرمی است که قاعده‌ی آن چندضلعی منتظم باشد و

پای ارتفاع آن، مرکز قاعده باشد. در هرم منتظم، وجه‌های جانبی، مثلث

متساوی‌الساقین هستند.

چهاروجهی منتظم: هرمی است که هر ۴ وجه آن مثلث متساوی‌الاضلاع است.

گسترده‌ی آن به شکل مقابل است:



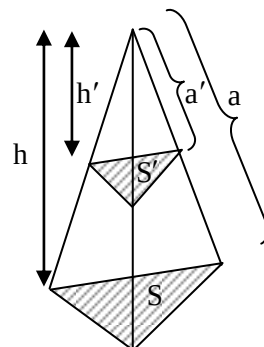
نکته: در این هرم (۴وجهی منتظم) به یال a داریم:

$$\text{ارتفاع هرم} = \sqrt{\frac{2}{3}} a$$

$$\text{حجم هرم} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$

$$\text{مساحت کل هرم} = \sqrt{3} a^2$$

نکته: هرگاه به موازات قاعده‌ی یک هرم، بر آن برش ایجاد کنیم، رابطه‌های زیر در آن برقرار می‌شود:



$$\frac{a'}{a} = \frac{h'}{h}$$

$$\frac{S'}{S} = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

$$\frac{V'}{V} = \left(\frac{h'}{h}\right)^3 = \left(\frac{a'}{a}\right)^3$$

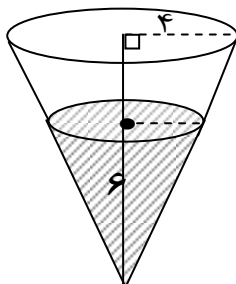
نکته: در هر چهاروجهی منتظم به اندازه‌ی یال a ، همواره داریم:

$$r = \frac{\sqrt{6}}{12} a \quad \text{شعاع کره‌ی محاطی}$$

$$R = \frac{\sqrt{6}}{4} a \quad \text{شعاع کره‌ی محیطی}$$

سؤال ۵: درون مخروطی به ارتفاع ۸ واحد، مقداری آب به ارتفاع ۶ وجود دارد. اگر سنگی درون آن

بیاندازیم، آب آن قدر بالا می‌آید که مخروط کاملاً پر می‌شود. حجم سنگ برحسب π چه قدر است؟



$$\frac{74\pi}{3} \quad (۲)$$

$$18\pi \quad (۱)$$

$$\frac{32\pi}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{14\pi}{3} \quad (۳)$$



نکته: حجم کره با قطر D : $\frac{\pi}{6} D^3$

نکته: مکعب به یال a را در نظر بگیرید. در این صورت داریم:

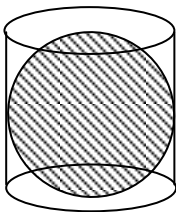
$$r = \frac{1}{4} a \quad \text{شعاع کره‌ی محاطی} \quad R = \frac{\sqrt{3}}{4} a \quad \text{شعاع کره‌ی محیطی}$$

نکته: اگر S مساحت کره به شعاع R باشد، داریم:

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

نکته: نسبت حجم به مساحت هر کره برابر است با ثلث شعاع کره: $\frac{V}{S} = \frac{R}{3}$

نکته: حجم کره‌ی محاط شده درون یک استوانه، همواره $\frac{2}{3}$ حجم استوانه است.



سؤال ۶: ارتفاع و قطر قاعده‌ی یک مخروط قائم 12 cm است. مخروط را پر از آب کرده و کره‌ای را تا حد ممکن در مخروط فرو می‌بریم. دقیقاً نصف کره خارج از آب می‌ماند. پس از خارج کردن کره، تقریباً چند سانتی‌متر مکعب آب داخل مخروط باقی می‌ماند؟

(۴) 30π

(۳) 35π

(۲) 40π

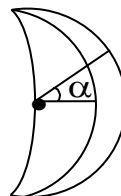
(۱) 50π

نکته: حجم و مساحت قاع کروی:

$$V = \frac{\alpha}{360} \times \frac{4}{3} \pi R^3 \quad \text{قاع کروی}$$

$$S = \frac{\alpha}{360} \times 4\pi R^2 \quad \text{پوسته‌ی قاع کروی}$$

$$S = \frac{\alpha}{360} \times 4\pi R^2 + \pi R^2 = \frac{\alpha}{90} \pi R^2 \quad \text{کل قاع کروی}$$



سؤال ۷: گنجایش یک لوله‌ی بزرگ و چهار لوله‌ی کوچک بر حسب مترمکعب در ساعت برابر اعدادی طبیعی هستند. گنجایش لوله‌ی بزرگ $6 \text{ m}^3 / \text{h}$ بیش‌تر از یک لوله‌ی کوچک است. چهار لوله‌ی کوچک با یکدیگر می‌توانند استخری را ۲ ساعت سریع‌تر از لوله‌ی بزرگ پر کنند. بزرگ‌ترین حجم ممکن برای استخر چند مترمکعب است؟

(۴) ۸۲

(۳) ۷۸

(۲) ۷۲

(۱) ۶۴

سؤال ۸: نقطه‌ای به تصادف از درون یک مکعب انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که این نقطه درون بزرگ‌ترین مخروط (درون این مکعب) قرار گرفته باشد، چقدر است؟

(۴) $\frac{\pi}{18}$

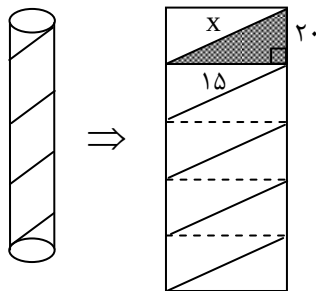
(۳) $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$

(۲) $\frac{\pi}{12}$

(۱) $\frac{\pi}{6\sqrt{2}}$

پاسخنامه تشریحی سوالات قسمت ششم (حجم)

۱- گزینه (۳) اگر استوانه و گیاه پیچیده به آن را از بالا تا پایین برش داده و آن را باز کنیم، شکل به صورت زیر می شود که با رابطه ی فیثاغورس می توان نوشت:



$$x^2 = 20^2 + 15^2 \Rightarrow x = \sqrt{400 + 225} = 25 \text{ cm}$$

در نتیجه طول ساقه ی گیاه، $5 \times 25 = 125$ سانتی متر است.

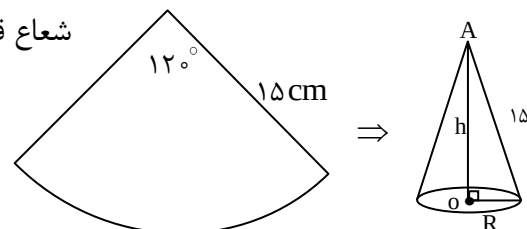
۲- گزینه (۴)

$$\frac{R}{L} = \frac{\theta}{360} \Rightarrow \frac{R}{15} = \frac{120}{360} \Rightarrow R = 5 \text{ cm}$$
 شعاع قاعده ی مخروط

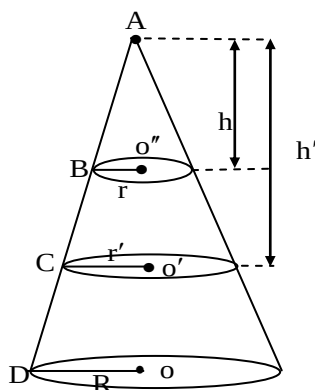
$$\triangle AOB: L^2 = h^2 + R^2 \Rightarrow 15^2 = h^2 + 5^2$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \times 25 \times 10\sqrt{2} = \frac{250\sqrt{2}}{3} \pi$$



۳- گزینه (۲)



$$O''B \parallel OD \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{h}{AO} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{h}{3} \Rightarrow r = \frac{Rh}{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{Rh}{3} \right)^2 \times h = \frac{1}{3} \times V \text{ کل}$$
 مخروط بالایی به مرکز

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \pi \times \frac{1}{9} h^2 R^2 = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3} \pi R^2 \times 3 \right) \Rightarrow h = \sqrt[3]{9}$$

برشی که در C زده ایم، مخروطی ایجاد کرده است که حجم آن $\frac{2}{3}$ حجم کل است.

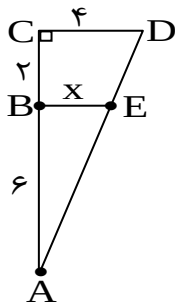
پس می توان نوشت:

$$\frac{r'}{R} = \frac{h'}{3} \Rightarrow r' = \frac{Rh'}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} \pi \times \frac{1}{9} h'^2 R^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} \pi R^2 \times 3 \right) \Rightarrow h' = \sqrt[3]{18}$$

پس ارتفاع های برش از طرف قاعده برابرند با $3 - \sqrt[3]{9}$ و $3 - \sqrt[3]{18}$.

۴- گزینه (۳) با هم برابرند.

۵- گزینه (۲)



$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD} \Rightarrow \frac{6}{8} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 3$$

حجم آب - حجم مخروط = حجم سنگ

$$= \frac{1}{3} \pi DC^2 \times AC - \frac{1}{3} BE^2 \times AB$$

$$= \frac{1}{3} \pi (4^2 \times 8 - 3^2 \times 6) = \frac{74\pi}{3}$$

۶- گزینه (۲)

$$\triangle AHC: \overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HC}^2 \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{180}$$

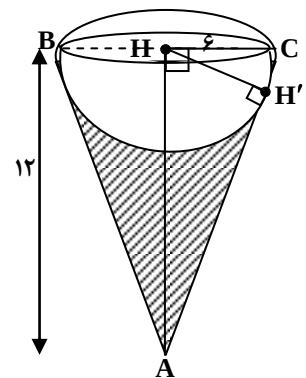
$$\triangle AHC: \overline{AH} \times \overline{HC} = \overline{HH'} \times \overline{AC} \Rightarrow \overline{HH'} = \frac{6 \times 12}{\sqrt{180}} \quad \text{شعاع نیم کره}$$

$$V = \frac{2}{3} \pi \left(\frac{6 \times 12}{\sqrt{180}} \right)^3 \Rightarrow \text{نیم کره } V = \frac{1152}{5\sqrt{5}} \pi$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \times 6^2 \times 12 = 144\pi \quad \text{مخروط}$$

$$V = 144\pi - \frac{1152}{5\sqrt{5}} \pi \approx 40\pi \quad \text{آب باقی مانده}$$

پس می توان نوشت:



۷- گزینه (۲) اگر ظرفیت لوله ی کوچک، a باشد، پس ظرفیت لوله ی بزرگ a+۶ است. اگر لوله های کوچک در مدت زمان x ساعت استخر را پر کنند، پس لوله ی بزرگ در x+۲ ساعت استخر را پر می کند. اگر حجم استخر را V در نظر بگیریم، داریم:

$$V = fa \times x = (a+6)(x+2) \Rightarrow fax = ax + 2a + 6x + 12$$

$$\Rightarrow 3ax - 2a - 6x - 12 = 0 \Rightarrow (a-2)(3x-2) - 16 = 0 \Rightarrow (a-2)(3x-2) = 16$$

اکنون مسأله ۵ حالت دارد که آن ها را بررسی می کنیم:

$$a-2=1 \Rightarrow 3x-2=16 \Rightarrow x=6 \Rightarrow V=4 \times 3 \times 6 = 72$$

$$a-2=2 \Rightarrow 3x-2=8 \Rightarrow x=\frac{10}{3} \Rightarrow V=4 \times 4 \times \frac{10}{3} = \frac{160}{3} \approx 53\frac{1}{3}$$

$$a-2=4 \Rightarrow 3x-2=4 \Rightarrow x=2 \Rightarrow V=4 \times 6 \times 2 = 48$$

$$a-2=8 \Rightarrow 3x-2=2 \Rightarrow x=\frac{4}{3} \Rightarrow V=4 \times 10 \times \frac{4}{3} = \frac{160}{3} \approx 53\frac{1}{3}$$

$$a-2=16 \Rightarrow 3x-2=1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow V=4 \times 18 \times 1 = 72$$

با بررسی ۵ حالت نوشته شده، مشخص است که بزرگ ترین حجم ممکن برای استخر ۷۲ واحد است.

۸- گزینه (۲) اگر ضلع مکعب را a در نظر بگیریم، حجم آن a^3 می‌شود. از طرفی ارتفاع مخروط نیز a و شعاع قاعده‌ی مخروط، $\frac{a}{2}$ است. داریم:

$$P(A) = \frac{V_{\text{مخروط}}}{V_{\text{مکعب}}} = \frac{\frac{1}{3} \pi \times \left(\frac{a}{2}\right)^2 \times a}{a^3} = \frac{\frac{a^3 \pi}{12}}{a^3} = \frac{\pi}{12}$$

قسمت هفتم: توان و ریشه

نکته: اگر $a > 0$ آنگاه $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

سوال ۱: در مورد $\sqrt[3]{-8}$ چه می توان گفت؟

سوال ۲: در مورد $(-8)^{\frac{1}{3}}$ چه می توان گفت؟

نکته: اگر $a < 0$ باشد، $a^{\frac{1}{n}}$ تعریف شده نیست. $(-1)^{\frac{1}{3}}$ و $(-2)^{\frac{2}{4}}$ تعریف شده نیستند. پس در عبارت $a^{\frac{1}{n}}$ باید $a > 0$ باشد.

نکته: اگر $a > 0$ باشد، $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

نکته: اگر $a > 0$ باشد، $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$.

سوال ۳: حاصل عبارت مقابل به صورت عدد تواندار کدام است؟
 $7^{2^{3^2}} \times (7^2)^{3^2} \times ((7^2)^3)^2$
 (۱) 7^{1084} (۲) 7^{542} (۳) 7^{246} (۴) 7^{36}

سوال ۴: حاصل عبارت $2 \times 2^2 \times 2^{2^2} \times 2^{2^3} \times 2^{2^4} \times 2^{2^5} \times \dots \times 2^{2^{30}}$ به صورت عدد تواندار کدام است؟
 (۱) $2^{2^{30}}$ (۲) $2^{2^{31}}$ (۳) $2^{2^{31}-1}$ (۴) $2^{2^{31}} - 1$

نکته: توان منفی $2^{-3} = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

نکته: $(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n$ و $n \in \mathbb{N}$

سوال ۵: حاصل عبارت $7^{2^0} + 6(7^{2^0} + 7^{2^1} + 7^{2^2} + \dots + 7^{100})$ به صورت عدد تواندار کدام است؟
 (۱) 7^{101} (۲) 7^{106} (۳) 7^{107} (۴) 6×7^{101}

سوال ۶: حاصل عبارت $(\dots(4(1+4(1+4(1+\dots+4(1+4))))))$ که تعداد ۴ها در آن ۱۰۰ تا می باشد، چه قدر است؟

(۱) $4^{100} - \frac{100(100+1)}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}(4^{100} - 100)$
 (۳) $\frac{1}{3}(4^{101} - 4)$ (۴) $\frac{1}{3}(4^{100} - 4)$

سوال ۷: حاصل عبارت $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots$ به کدام عدد زیر نزدیک تر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) ۲ (۴) ۳

سوال ۸: مقایسه کنید: $\frac{2^{100}}{1+2^{100}}$ $\square$ $\frac{2^{99}}{1+2^{99}}$

سوال ۹: چند عدد به شکل n^7 که n عدد طبیعی باشد، وجود دارد به طوری که بین اعداد $1+5^{21}$ و $1+2^{49}$ قرار داشته باشند؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

نماد علمی

سوال ۱۰: نمایش علمی عدد $1398 \times 10^{n-1}$ که در آن $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 3$ می باشد، کدام است؟

- (۱) $1/398 \times 10^4$ (۲) $1/398 \times 10^5$ (۳) $1/398 \times 10^{n+4}$ (۴) $1/398 \times 10^{2n-6}$

سوال ۱۱: عدد $3^2 \times 2^{10}$ ، چندمین عدد طبیعی زوج است؟

- (۱) ۴۶۰۷ (۲) ۴۶۰۸ (۳) ۴۶۰۹ (۴) ۴۶۱۰

نکته: اگر پس از تجزیه به عوامل اول، همه‌ی توان‌ها زوج باشند، آن عدد مربع کامل و اگر توان‌ها مضرب ۳ باشند، آن عدد مکعب کامل و اگر توان‌ها مضرب ۶ باشند، آن عدد، هم مربع کامل و هم مکعب کامل است.
توجه: عدد ۱، هم مربع کامل و هم مکعب کامل است.

سوال ۱۲: از ۱ تا $1+8^{10}$ ، چند عدد طبیعی وجود دارد که هم مربع کامل و هم مکعب کامل هستند؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۶۴ (۳) ۱۵ (۴) ۳۲

سوال ۱۳: عددی را به ما داده‌اند. آن را ۲ برابر کرده و از آن ۱ واحد کم می‌کنیم. این کار را ۹۸ بار دیگر

انجام می‌دهیم. اگر نتیجه‌ی نهایی عدد $1+2^{100}$ شود، عددی که در ابتدا به ما داده بودند، چند است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

نکته: اگر کاغذی را n بار از وسط و فقط به صورت افقی یا فقط به صورت عمودی، "تا" بزنیم، تعداد خطوط موازی ایجاد شده روی کاغذ از رابطه‌ی $2^n - 1$ به دست می‌آید.

نتیجه: اگر کاغذی را n بار به صورت افقی و m بار به صورت عمودی "تا" کنیم، $2^m + 2^n - 2$ خط روی کاغذ ایجاد می‌شود.

سوال ۱۴: یک ماشین حساب فضایی، فقط این عملیات را انجام می‌دهد. یک عدد را در ۲ یا ۳ ضرب می‌کند یا به توان ۲ یا ۳ می‌رساند. با شروع از عدد ۱۵، کدام یک از مقادیر زیر با ۵ بار استفاده‌ی متوالی از این ماشین حساب می‌تواند به دست آید؟

- (۱) $2^8 \times 3^5 \times 5^6$ (۲) $2^8 \times 3^4 \times 5^2$ (۳) $2^2 \times 3^3 \times 5^3$ (۴) $2^6 \times 3^6 \times 5^4$

سوال ۱۵: نفر اول، عدد ۱ را نوشت. نفر دوم عدد ۲ و نفر سوم و به بعد، عدد ما قبل را به قبل تقسیم کرد. دهمین دانش آموز چه عددی را می نویسد؟

- (۱) 2^{-10} (۲) ۲۵۶ (۳) 2^{-55} (۴) 2^{34}

سوال ۱۶: معکوس عدد $\sqrt{17} - 3\sqrt{2}$ کدام است؟

- (۱) $-17 + 3\sqrt{2}$ (۲) $-17 - 3\sqrt{2}$ (۳) $-\sqrt{17} + 3\sqrt{2}$ (۴) $-\sqrt{17} - 3\sqrt{2}$

سوال ۱۷: کوچک ترین عدد طبیعی n که به ازای آن رابطه ی

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \geq 100$$

برقرار باشد، کدام است؟

- (۱) ۱۰۰۰ (۲) ۱۰۰۰۰ (۳) ۵۱۲۱ (۴) ۱۰۲۰۰

سوال ۱۸: حاصل عبارت $A = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + \dots$ برابر است با:

- (۱) $4\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{6}$ (۳) ۶ (۴) $6\sqrt{2}$

سوال ۱۹: اگر $136 = (2 + \sqrt{2})^4 + (2 - \sqrt{2})^4$ باشد، بزرگ ترین عدد صحیح کوچک تر از $(2 + \sqrt{2})^4$ کدام است؟

- (۱) ۱۳۵ (۲) ۶۹ (۳) ۱۰۲ (۴) ۶۷

سوال ۲۰: ساده شده ی عبارت $\sqrt[3]{\frac{96^3 + 160^3}{33^3 + 55^3}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{32}{11}$ (۲) $\frac{64}{11}$ (۳) $\frac{22}{32}$ (۴) $\frac{32}{22}$

پاسخ تشریحی سؤالات قسمت هفتم (توان و جذر)

۱- عدد (۲-)

۲- تعریف نشده است.

۳- گزینه (۲)

$$7^{2^{2^2}} = 7^{2^9} = 7^{512}, (7^2)^{2^2} = (7^2)^9 = 7^{18}, ((7^2)^2)^2 = 7^{12} \Rightarrow 7^{512} \times 7^{18} \times 7^{12} = 7^{542}$$

۴- گزینه (۳)

$$1+2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{30} = 2+2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{30}-1 = 2^{31}-1$$

۵- گزینه (۱)

$$\underbrace{7^{20} + 6 \times 7^{20}}_{7^{21}} + 6 \times 7^{21} + 6 \times 7^{22} + \dots + 6 \times 7^{100} = 7^{101}$$

۶- گزینه (۳) از راهبرد حل مسئله‌ی ساده‌تر استفاده می‌کنیم:

$$4(1+4) = 4 + 4^2$$

$$4(1+4(1+4)) = 4(1+4+4^2) = 4 + 4^2 + 4^3$$

:

$$4(1+4(1+4(\dots(1+4(1+4))))\dots) = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{100}$$

$$\left. \begin{array}{l} A = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{100} \\ 4A = 4^2 + 4^3 + 4^4 + \dots + 4^{101} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اختلاف}} 3A = 4^{101} - 4 \Rightarrow A = \frac{1}{3}(4^{101} - 4)$$

۷- گزینه (۱)

$$\left. \begin{array}{l} A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots \\ 3A = 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اختلاف}} 2A = 3 \Rightarrow A = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

۸- طرفین وسطین می‌کنیم. داریم:

$$2^{100}(1+2^{99}) \square 2^{99}(1+2^{100}) \Rightarrow 2^{100} + 2^{199} \square 2^{99} + 2^{199} \Rightarrow 2^{100} > 2^{99}$$

۹- گزینه (۲)

$$\left. \begin{array}{l} 2^{49} + 1 = (2^7)^7 + 1 = 128^7 + 1 \\ 5^{21} + 1 = (5^3)^7 + 1 = 125^7 + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 125^7 + 1 < \underbrace{126^7 < 127^7 < 128^7}_{\text{عدد 3}} < 128^7 + 1$$

۱۰- گزینه (۱)

$$\underbrace{0.\overline{0000001398}}_{\text{رقم } n-6} \times 10^{n-1} = 1/398 \times 10^{-(n-5)} \times 10^{n-1} = 1/398 \times 10^{-n+5+n-1} = 1/398 \times 10^4$$

۱۱- گزینه (۲) عدد $۲^۱۰ \times ۳^۲$ ، ۹۲۱۶ آمین عدد طبیعی است.

$$۲^۱۰ \times ۳^۲ = ۱۰۲۴ \times ۹ = ۹۲۱۶ \Rightarrow ۹۲۱۶ \div ۲ = ۴۶۰۸$$

۱۲- گزینه (۴)

$$۸^۱۰ = (۲^۳)^۱۰ = ۲^{۳۰} = (۲^۵)^۶ = ۳۲^۶$$

تعداد ۳۲ تا است. $\Rightarrow ۱۶, ۲۶, ۳۶, ۴۶, \dots, ۳۲۶$

۱۳- گزینه (۲) عدد داده شده را a در نظر بگیرید. عدد بدست آمده در هر مرحله، به صورت زیر است:

مرحله (۱)	مرحله (۲)	مرحله (۳)	مرحله (۹۹)
$۲a - ۱$	$۲(۲a - ۱) - ۱$	$۲(۲^۲a - ۲ - ۱) - ۱$	$۲^{۹۹}a - ۲^{۹۸} - ۲^{۹۷} - \dots - ۲ - ۱$
	$= ۲^۲a - ۲ - ۱$	$= ۲^۳a - ۲^۲ - ۲ - ۱$	

در مرحله ی (۹۹) داریم:

$$۲^{۹۹}a - (\underbrace{۲^{۹۸} + ۲^{۹۷} + ۲^{۹۶} + \dots + ۲ + ۱}_{۲^{۹۹}-۱}) = ۲^{۹۹}a - ۲^{۹۹} + ۱ = ۲^{۱۰۰} + ۱ \Rightarrow ۲^{۹۹}a = ۲^{۱۰۰} + ۲^{۹۹}$$

$$\xrightarrow{\div ۲^{۹۹}} a = ۲ + ۱ = ۳$$

۱۴- گزینه (۴)

$$۱۵ = ۳ \times ۵ \xrightarrow[\text{مرحله ۱}]{\text{ضرب در ۲}} ۲ \times ۳ \times ۵ \xrightarrow[\text{به توان ۲}]{\text{ضرب در ۲}} ۲^۲ \times ۳^۲ \times ۵^۲ \xrightarrow[\text{ضرب در ۲}]{\text{ضرب در ۲}} ۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵^۲$$

$$\xrightarrow[\text{ضرب در ۳}]{\text{به توان ۲}} ۲^۳ \times ۳^۳ \times ۵^۲ \xrightarrow[\text{به توان ۲}]{\text{ضرب در ۲}} ۲^۴ \times ۳^۶ \times ۵^۴$$

۱۵- گزینه (۴) اعداد زیر به دست می آیند:

$$۱, ۲^۱, ۲^{-۱}, ۲^۲, ۲^{-۳}, ۲^۵, ۲^{-۸}, \dots$$

اگر عدد ۱ را، ۲° در نظر بگیریم و قدرمطلق توان ها را در نظر بگیریم، اعداد $۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴$ به دست می آیند که جملات دنباله ی فیبوناتچی هستند. پس دهمین دانش آموز، عدد $۲^{۳۴}$ را می نویسد.

۱۶- گزینه (۴)

$$\sqrt{۱۷} - ۳\sqrt{۲} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{۱}{\sqrt{۱۷} - ۳\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۱۷} + ۳\sqrt{۲}}{\sqrt{۱۷} + ۳\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۱۷} + ۳\sqrt{۲}}{\underbrace{۱۷ - ۱۸}_{-۱}} = -\sqrt{۱۷} - ۳\sqrt{۲}$$

۱۷- گزینه (۴) با گویا کردن مخرج کسر ها، عبارت زیر حاصل می شود:

$$-۱ + \sqrt{۲} - \sqrt{۲} + \sqrt{۳} - \sqrt{۳} + \sqrt{۴} + \dots - \sqrt{n} + \sqrt{n+۱} = -۱ + \sqrt{n+۱} \geq ۱۰۰$$

$$\Rightarrow \sqrt{n+۱} \geq ۱۰۱ \xrightarrow[\text{به توان ۲}]{\text{به توان ۲}} n+۱ \geq ۱۰۲۰۱ \Rightarrow n \geq ۱۰۲۰۰$$

۱۸- گزینه (۳)

$$A = ۲\sqrt{۳ + \underbrace{۲\sqrt{۳ + ۲\sqrt{۳ + \dots}}}_A} \Rightarrow A = ۲\sqrt{۳ + A}$$

$$\xrightarrow[\text{به توان ۲}]{\text{به توان ۲}} A^۲ = ۴(۳ + A) \Rightarrow A^۲ - ۴A - ۱۲ = ۰ \Rightarrow (A - ۶)(A + ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} A = ۶ & \text{قابل قبول} \\ A = -۲ & \text{غ ق} \end{cases}$$

۱۹- گزینه (۱) حاصل عبارت $(2-\sqrt{2})^4$ ، بین ۰ و ۱ است. پس می توان نوشت:

$$(2+\sqrt{2})^4 + (2-\sqrt{2})^4 = 136 \Rightarrow (2+\sqrt{2})^4 = 136 - \underbrace{(2-\sqrt{2})^4}_{\text{بین } 0 \text{ و } 1}$$

بزرگ ترین عدد صحیح کوچک تر، عدد ۱۳۵ است. $\Rightarrow 135 < (2+\sqrt{2})^4 < 136$

۲۰- گزینه (۱)

$$\sqrt[3]{\frac{96^3 + 160^3}{33^3 + 55^3}} = \sqrt[3]{\frac{(2^5 \times 3)^3 + (2^5 \times 5)^3}{(3 \times 11)^3 + (5 \times 11)^3}} = \sqrt[3]{\frac{2^{15} \times 3^3 + 2^{15} \times 5^3}{3^3 \times 11^3 + 5^3 \times 11^3}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{2^{15}(3^3 + 5^3)}{11^3(3^3 + 5^3)}} = \sqrt[3]{\frac{2^{15}}{11^3}} = \frac{2^5}{11} = \frac{32}{11}$$