

عبارت گویا چیست؟ کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای باشد.
مثال:

$$\frac{2x+1}{x+1}, \frac{x^2-y^2}{x^3-4x+y^2}, \frac{2}{3}, 2xy$$

نکته: اگر در صورت و مخرج یک عبارت کسری یک جمله‌ای یا چند جمله‌ای برقرار نباشد آن عبارت گویا نیست. (رابطه‌های هارو قدر مطلق‌ها و ...)

مثال: عبارت‌های زیر گویا هستند یا نه؟

$$\frac{\sqrt{x}}{2x+1}, \frac{|x|+2}{|xy|-2x}, \frac{x^3-1}{x^3-x^2}$$

نکته: هر عدد گویا یک عبارت گویاست اما هر عبارت گویا یک عدد گویا نیست.

مخرج: عبارت $\frac{x^2+3}{x-1}$ را برای $x=2$ و $x=1$ بدست آورده

$$x=2 \Rightarrow \frac{2^2+3}{2-1} = \frac{7}{1} = 7$$

$$x=1 \Rightarrow \frac{1+3}{1-1} = \frac{4}{0} = \text{تعریف نشده}$$

مخرج: عبارت $\frac{x-1}{x^2+6x+9}$ به ازای چه مقادیری تعریف نشده است.

$$x^2+6x+9=0$$

$$(x+3)^2=0 \Rightarrow x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

تعریف نشده = مخرج صفر شود

نکته: دامنه عبارت‌های گویا اعدادی هستند که هیچگاه مخرج کسر را صفر نمی‌کند.

(یا در آوری) اگر حاصل ضرب چند عبارت برابر صفر باشد عددهای آن صفر است.
 $ab=0 \Rightarrow a=0 \text{ یا } b=0$

تمرین: دامنه عبارت‌های زیر را بدست آورده.

$$1) \frac{x^3}{x^2-1} \quad \begin{aligned} x^2-1 &= 0 \\ (x-1)(x+1) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{دامنه } D = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

۲) $\frac{x-1}{3x^2-7x}$ $3x^2-7x=0$ $x-a=0$ $x+a=0$
 $3(x^2-2a)=0$ $\boxed{x=a}$ $\boxed{x=-a}$
 $3(x-a)(x+a)=0 \rightarrow D = \mathbb{R} - \{\pm a\}$

۳) $\frac{3a}{a^2-19}$ $a^2-19=0 \Rightarrow (a^2+2)(a+2)(a-2)=0$
 $\neq 0$ $a=-2$ $a=2$
 $D = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

۴) $\frac{a-3}{3a^3-6a^2-4a}$ $3a(a^2-2a-4)=0$
 $3a(a-2)(a+2)=0$
 $a=0$ $a=2$ $a=-2$
 $D = \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$

+ ۵) $\frac{\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-4}}{\frac{2}{x} - \frac{1}{x+2}} \Rightarrow$

نکته: برای ساده کردن کسرها عبارت گویا ابتدا آنرا تجزیه در صورت و مخرج را ساده کنیم
 عین: ساده کنید:

۱) $\frac{5x^2y-10xy^2}{x^2-4y^2} = \frac{5xy(x-2y)}{(x-2y)(x+2y)} = \frac{5xy}{x+2y}$

۲) $\frac{x^2+7x+10}{x^2+4x-5} = \frac{(x+5)(x+2)}{(x-1)(x+5)} = \frac{x+2}{x-1}$

۳) $\frac{y^4+3y^3+2y^2}{y^2+2y} = \frac{y^2(y^2+3y+2)}{y(y+2)} = \frac{y^2(y+2)(y+1)}{y(y+2)} = y(y+1)$

+ ۴) $\frac{x^3-x^2-4x+4}{x^2-3x+2}$

جواب :

$$ع) \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x^2(x-1) - 4(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x-1)(x^2 - 4)}{(x-1)(x-2)} =$$

$$= \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \frac{x+2}{1} = x+2$$

تمرین : در مربع چه عبارتی قرار می گیریم :

$$\frac{x^2 - 10x + 25}{4x^2 - 20x} = \frac{x^2 - 25}{\square}$$

همه عملیات را تجزیه می کنیم

$$\frac{(x+5)^2}{4x(x-5)} = \frac{(x+5)(x-5)}{\square}$$

ساده می کنیم :

$$\frac{1}{4x} = \frac{x+5}{\square} \Rightarrow \square = 4x(x+5) = 4x^2 - 20x$$

نکته : برای بدست آوردن ضرب و تقسیم عبارات گویا ابتدا همه صورت ها را تجزیه کرده و سپس تا جایی ممکن ساده می کنیم.

تمرین : ساده کنید :

$$۱) \frac{a^2 - 4a + 4}{4a^2b - 1ab} \times \frac{6a^2b + 11ab}{a^2 + a - 6} = \frac{(a-2)^2}{4ab(a-2)} \times \frac{ab(a+3)}{(a-2)(a+3)} = \frac{1}{4}$$

$$۲) \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} \div \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x} = \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} \times \frac{x(x+1)}{(x+2)(x+1)} = 1$$

$$۳) \frac{x^2 - x}{x - 1} \div \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1} \div \frac{x}{x+1} = \frac{x(x-1)}{(x-2)(x^2 + 2x + 1)} \times \frac{x^2 + 2x + 1}{(x-1)(x+1)} \times \frac{x+1}{x} = \frac{1}{x-2}$$

میان راعز

$$+۴) \frac{3x^2y^3 - 5xy^2}{-y^2x^2} \div \frac{25x^2 - 9y^2}{5xy + 3y^2} \times \frac{x^2}{y^2} =$$

$$ع) \frac{3x^2y - 2xy^2}{-yx^2} \div \frac{2\Delta x^2 - 9y^2}{\Delta xy + 3y^2} \times \frac{x^2}{y^2} =$$

$$= \frac{x^2y^2(3y - 2x)}{-yx^2} \times \frac{2(\Delta x + 3y)}{(\Delta x - 3y)(\Delta x + 3y)} \times \frac{x^2}{y^2} = 1$$

$-(3y - 2x)$

نکته: برای جمع و تفریق عبارت‌های کسری باید ابتدا مخرج مشترک پیدا کنیم.

$$۱) \frac{3x-4}{12} - \frac{2x+4}{18} = \frac{3(3x-4) - 2(2x+4)}{36} = \frac{9x-12-4x-8}{36} = \frac{5x-20}{36}$$

$$۲) \frac{a+b}{a} - \frac{b-a}{b} = \frac{b(a+b) - a(b-a)}{ab} = \frac{ba + b^2 - ab + a^2}{ab} = \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

$$۳) \frac{x-3}{4x^2} - \frac{3+2x^2}{12x^3} + \frac{3}{x} = \frac{3x(x-3) - (3+2x^2) + 36x^2}{12x^3} = \frac{3x^2-9x-3-2x^2+36x^2}{12x^3} = \frac{34x^2-9x-3}{12x^3}$$

نکته: مخرج مشترک = ک.م.م = ابتدا تجزیه پس عامل مشترک با بران بیشتر و عامل غیر مشترک

$$۴) \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{4x-2}{x^2-1} = \frac{x(x+1) + (x-1) - (4x-2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x+x-1-4x+2}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{x^2-2x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x-1)}{(x+1)}$$

$$۵) \frac{3x^2-3x}{x^2-3x+2} + \frac{2}{2-x} = \frac{3x(x-1)}{(x-1)(x-2)} + \frac{x}{-(x-2)} = \frac{3x}{x-2} - \frac{x}{x-2} = \frac{2x}{x-2}$$

$$۶) \frac{-4}{x^2+2x-3} + \frac{2}{x^2+x-6} = \frac{-4}{(x+3)(x-1)} + \frac{2}{(x+3)(x-2)} =$$

$$= \frac{-4(x-2) + 2(x-1)}{(x+3)(x-1)(x-2)} = \frac{-4x+8+2x-2}{(x+3)(x-1)(x-2)} = \frac{-2x+6}{(x+3)(x-1)(x-2)} = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

$$۷) \frac{ax^2+b}{2x-1} + \frac{2(bx+ax^2)}{1-4x^2} - \frac{ax^2-b}{2x+1} =$$

نکته: عبارت‌های گویای مرکب عبارت‌اند که صورت و مخرج آن‌ها عبارت گویای دیگری
 مخرج ساده کنید

$$1) \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1}} = \frac{\frac{a+1-a}{a(a+1)}}{\frac{a+1+a}{a(a+1)}} = \frac{\frac{1}{a(a+1)}}{\frac{2a+1}{a(a+1)}} = \frac{1}{2a+1}$$

$$2) \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \frac{\frac{x^2 - 2x + 6}{x^2}}{\frac{x^2 - x - 2}{x^2}} = \frac{x^2 - 2x + 6}{x^2 - x - 2} = \frac{(x-3)(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{x-3}{x+1}$$

$$3) 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = 1 - \frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}} = 1 - \frac{1}{-x} = 1 + \frac{1-x}{x} = \frac{x+1-x}{x} = \frac{1}{x}$$

مخرج: اگر $\frac{ax^2 - ax}{x} \times \frac{3x+6}{x^2+x-2} = 6$ باشد مقدار a را بدست آوریم
 ابتدا تجزیه می‌کنیم

$$\frac{ax(x-1)}{x} \times \frac{3(x+2)}{(x+2)(x-1)} = 6$$

پس باید ساده کرد.

$$\frac{a}{x} \times 3 = 6 \Rightarrow \frac{3}{x} a = 6 \Rightarrow a = 1$$

مخرج: مقدار a, b را بدست آوریم

$$\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} = \frac{2x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{ax - a + bx + b}{(x+1)(x-1)} = \frac{(a+b)x - a + b}{x^2-1} = \frac{2x+1}{x^2-1}$$

$$\begin{cases} a+b=2 \\ -a+b=1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2b &= 3 \\ b &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$a+b=2$$

$$a + \frac{3}{2} = 2 \Rightarrow \underline{a = \frac{1}{2}}$$

$$\frac{vx - 2}{x^2 - 2x - 3} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+1}$$

$$\frac{vx - 2}{x^2 - 2x - 3} = \frac{ax + a + bx - 3b}{(x-3)(x+1)} = \frac{(a+b)x + a - 3b}{x^2 - 2x - 3}$$

$$\begin{cases} a+b=v \\ a-3b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a+3b=3v \\ a-3b=-2 \end{cases}$$

$$\frac{4a=3v-2}{a=\frac{3v-2}{4}}$$

$$\begin{aligned} a+b &= v \\ 3a+b &= v \Rightarrow \underline{b = \frac{2v}{2}} \end{aligned}$$

نقشه تقسیم حجم بر یک حجم : (مانند عددی که تداوفا عمل می‌کنیم)

$$80x^3y^2z^5 \div 16x^2y^3 = \frac{80x^3y^2z^5}{16x^2y^3} = 5x^1y^{-1}z^5$$

تقسیم چندجمله‌ای بر یک جمله : هر جمله صورت را به یک جمله خارج تقسیم می‌کنیم. مثال /

$$(8x^5y^6 - 16x^4y^2 + x^3y^3) \div (-2x^2y) = \frac{8x^5y^6 - 16x^4y^2 + x^3y^3}{-2x^2y} =$$

$$= \frac{8x^5y^6}{-2x^2y} + \frac{16x^4y^2}{2x^2y} - \frac{x^3y^3}{2x^2y} = -4x^3y^5 + 8y - \frac{1}{2}x^1y^2$$

تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای : مقوم علیه / مقوم
 خارج قسمت / باقی مانده
 ابتدا مقوم را مقوم کنیم را به یک جمله تداوفا
 نزولی متغیر می‌نویسیم

$$1) \quad \begin{array}{r} 6x^2 - 24x + 12 \\ - 6x^2 + 24x \\ \hline -24x + 12 \\ -24x + 12 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x-4 \\ 6x-2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 6x^2 \\ x \\ \hline 6x \end{array} = 6x$$

$$\begin{array}{r} 27 \overline{) 5} \\ - 25 \\ \hline 2 \end{array}$$

نوع : تقسیم ناجایی اداام دارد که
 درص باقی مانده از درص مقوم کنیم
 کمتر شود.

$$2) \quad \begin{array}{r} 3x^3 + 2x^2 - 4x - 1 \\ - 3x^3 + 3x^2 \\ \hline 5x^2 - 4x - 1 \\ - 5x^2 + 5x \\ \hline x - 1 \\ x - 1 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x-1 \\ 3x^2 + 5x + 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3x^3 + 2x^2 - 4x - 1 \\ - 3x^3 + 3x^2 \\ \hline 5x^2 - 4x - 1 \\ - 5x^2 + 5x \\ \hline x - 1 \\ x - 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$3) \quad \begin{array}{r} 2x^5 + x^4 - x^3 + 1 \\ - 2x^5 + 2x^4 \\ \hline 3x^4 - x^3 + 1 \\ - 3x^4 + 3x^3 \\ \hline 2x^3 + 1 \\ 2x^3 - 2x^2 \\ \hline 2x^2 + 1 \\ 2x^2 - 2x \\ \hline 2x + 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} -x^2 + x \\ - 2x^3 - 3x^2 - 2x - 2 \end{array}$$

نتیجه: برای باقی مانده بدین انجام تقسیم کافی است ریشه مقدم علیه را در قسم جایگزین کرد.

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 5x + 2 \quad | \quad x+2 \\ \underline{-3x^2 - 6x} \\ -11x + 2 \\ \underline{11x + 22} \\ 24 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x+2 &= 0 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

نماینده ریشه ۱

$$\Rightarrow 3(-2)^2 - 5(-2) + 2 = 12 + 10 + 2 = 24$$

نماینده: اگر باقی مانده تقسیم $3x^2 - 5x + a$ بر $x-2$ برابر ۳ باشد، مقدار a چیست؟

$$\begin{aligned} x-2 &= 0 \\ x &= 2 \\ 3(2)^2 - 5(2) + a &= 3 \\ 12 - 10 + a &= 3 \\ \boxed{a=5} \end{aligned}$$

نماینده: چند جمله ای $x^3 + ax^2 + 4x - 2$ بر $x+1$ بخش پذیر است، مقدار a چیست؟

$$\begin{aligned} x+1 &= 0 \\ x &= -1 \\ (-1)^3 + a(-1)^2 + 4(-1) - 2 &= 0 \\ -1 + a - 4 - 2 &= 0 \\ \boxed{a=7} \end{aligned}$$

نماینده: اگر خارج قسمت تقسیم $x^2 - 4x + b$ بر $x+a$ برابر $x-3$ و باقی مانده -3 باشد، مقدار a و b را بدست آورید.

حل: وقت کنده به استخوان تقسیم: باقی مانده + (خارج قسمت $\times$ مقدم علیه) = ستون

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + b &= (x+a)(x-3) - 3 \\ x^2 - 4x + b &= x^2 + (a-3)x - 3a - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a-3 &= -4 & -3a-3 &= b \\ \boxed{a=-3} & & -3(-3)-3 &= b \\ & & \boxed{6=b} & \end{aligned}$$

بنابراین جایگزین کرد

پایان فصل ✓